



朝阳区线上课堂·高三年级数学

函数与导数综合专题 ——函数的极值问题

对外经济贸易大学附属中学（北京市第九十四中学）

徐凤茹

学习目标

知识

能熟练使用求导公式，能利用导数的正负与函数的单调性关系确定极值.

策略

能利用导数解决函数的极值问题，并梳理出与函数极值有关问题的策略.

能力

通过对极值定义的“再认识”，研究对象的“再选择”优化解题方法及步骤，提高分析问题，解决问题的能力.

预备知识

必备概念

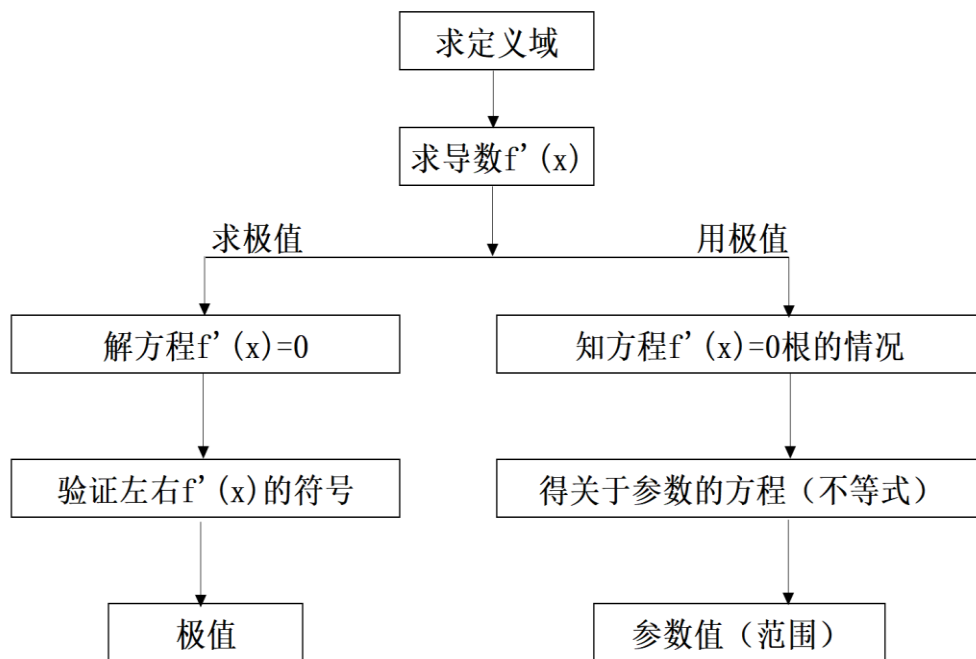
1

常见的**基本初等函数**的**导数公式**

2

导数与**函数极值**的关系

常见解题 流程



典型例题

例 已知函数 $f(x) = x \ln(x + 1) - ax^2 (a \in R)$

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 当 $a < 0$ 时, 求证: 函数 $f(x)$ 存在极小值.

例1已知函数 $f(x) = x\ln(x+1) - ax^2 (a \in \mathbb{R})$

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

解题思路:

- 1、求切点;
- 2、利用 $k = f'(x)$ 求斜率;
- 3、用点斜式求出切线方程。

例1已知函数 $f(x) = x\ln(x+1) - ax^2 (a \in R)$

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

解: 因为 $f(0) = 0 \ln(0+1) - a \cdot 0^2 = 0$

所以切点的坐标为 $(0,0)$

因为 $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} - 2ax$

$$k = f'(0) = \ln(0+1) + \frac{0}{0+1} - 2a \cdot 0 = 0$$

所以切线的斜率 $k = 0$,

代入点斜式方程 $y - y_0 = k(x - x_0)$

得到 $y - 0 = 0(x - 0)$

所以切线的方程为 $y = 0$

例1已知函数 $f(x) = x\ln(x+1) - ax^2 (a \in R)$

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 当 $a < 0$ 时, 求证: 函数 $f(x)$ 存在极小值.

(II) 转化方法一:

求函数极值的步骤:

1、求定义域

2、求导

3、判断导数恒正或恒负, 否则求 $f'(x) = 0$ 的解

4、若不能确定导数恒正或恒负, 也不会求 $f'(x) = 0$ 的解, 那么求函数的二阶导数

5、利用二阶导数的正负确定一阶导数的增减, 在确定一阶导数的正负, 进而确定原函数的单调性, 即可得出函数得极值。

(II) 解法一:

$f(x)$ 的定义域为 $\{x|x > -1\}$

$$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} - 2ax$$

$$\text{令 } g(x) = f'(x)$$

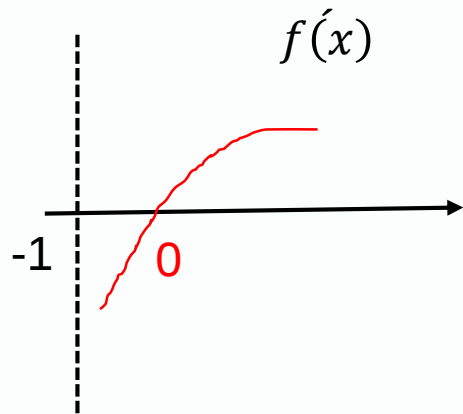
$$g'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - 2a$$

因为 $x > -1$ 且 $a < 0$ 所以 $\frac{1}{x+1} > 0$, $\frac{1}{(x+1)^2} > 0$, $-2a > 0$

从而得到 $g'(x) > 0$ 在 $(-1, +\infty)$ 上恒成立

所以 $f'(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增

$$\text{且 } f'(0) = 0$$



所以 x , $f'(x)$, $f(x)$ 在区间 $(-1, +\infty)$ 的变化情况如下表:

x	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$		极小值	

所以 $x = 0$ 时, $f(x)$ 取得极小值, 问题得证.

运算难点及突破方法：

1. 求导运算过关，注意观察 $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} - 2ax$ ，不要盲目通分。
2. 能清晰的知道二阶导的正负确定的是一阶导的单调，只有确定一阶导的正负才能确定原函数单调性，进而确定极值。



例1 已知函数 $f(x) = x \ln(x+1) - ax^2 (a \in \mathbf{R})$

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 当 $a < 0$ 时, 求证: 函数 $f(x)$ 存在极小值.

转化方法二:

在第一问中有 $f'(0) = 0$

只需讨论 $x = 0$ 左右 $f'(x)$ 的正负, 再根据
导数确定原函数的单调性, 进而确定极值,
即可证出。

例1已知函数 $f(x) = x \ln(x+1) - ax^2 (a \in R)$

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 当 $a < 0$ 时, 求证: 函数 $f(x)$ 存在极小值.

解法二:

因为 $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} - 2ax, \quad f'(0) = 0$

当 $a < 0$ 时,

当 $-1 < x < 0$ 时, $\ln(x+1) < 0, \frac{x}{x+1} < 0, -2ax < 0$ 所以 $f'(x) < 0$

当 $x > 0$ 时, $\ln(x+1) > 0, \frac{x}{x+1} > 0, -2ax > 0$ 所以 $f'(x) > 0$

得到 x , $f'(x)$, $f(x)$ 在区间 $(-1, +\infty)$ 的变化情况如下表:

x	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$		极小值	

所以 $x = 0$ 时, $f(x)$ 取得极小值, 问题得证.

运算难点及突破方法：

1. 求导运算过关，注意观察,且不可盲目对导数通分。
2. 注意观察题中 **问题与问题间的联系**，对极小值的 **概念** 理解到位，进而能注意到求解第一问时得到得结论 $f'(0) = 0$ ，只需讨论 $x = 0$ 左右 $f'(x)$ 的正负，而不是只模式化按着求极值的步骤做题。

例1已知函数 $f(x) = x\ln(x+1) - ax^2 (a \in R)$

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 当 $a < 0$ 时, 求证: 函数 $f(x)$ 存在极小值.

转化方法三:

利用极值的概念, 根据第一问的提示 $f(0) = 0$, 确定 $f(0)$ 比 $x = 0$ 附近的 $f(x)$ 小, 即可证出。

例1已知函数 $f(x) = x \ln(x+1) - ax^2 (a \in R)$

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 当 $a < 0$ 时, 求证: 函数 $f(x)$ 存在极小值.

解法三:

因为 $f(x) = x \ln(x+1) - ax^2$,

又因为 $f(0) = 0, a < 0$

当 $-1 < x < 0$ 时, $x \ln(x+1) > 0, -ax^2 > 0$,

所以 $f(x) > 0, f(x) > f(0)$

当 $x > 0$ 时, $x \ln(x+1) > 0, -ax^2 > 0$,

所以 $f(x) > 0, f(x) > f(0)$

所以 $x = 0$ 时, $f(x)$ 取得极小值, 问题得证.

运算难点及突破方法：

1. 极值的基本概念掌握的扎实，清楚极值是函数局部的最值。
2. 注意观察函数表达式的特征，对极小值的概念理解到位，进而能注意到求解第一问时 $f(0) = 0$ ，只需确定 $f(0)$ 比 $x = 0$ 附近的 $f(x)$ 都小，即可证明此题。

小结提升

1. 本节课通过对函数极值问题的分析，可以帮助我们加深对**极值基本概念**的理解；
2. 极值是**函数的局部最值**，在研究极值问题时我们应该更多的关注**函数的局部性质**；
3. 通过例题的讲解，明确解决导数问题的三大策略：**明确对象，正确分类，恰当讨论**；
4. **审题**，申请条件及隐含条件与要求的问题的**之间**的关系，**基本概念**一定要**扎实**。

学法建议



1. 导数问题求导是第一关，务必计算准确。
2. 导数是解决函数问题的工具，要明确研究的问题是什么，求导的目的是什么，而不是套模式。
3. 认真审题，努力挖掘题中条件与结论之间的内在联系，进而能简化解题过程。

课后作业:

设函数 $f(x) = [ax^2 - (4a + 1)x + 4a + 3]e^x$

(I) 若 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极小值, 求 a 的取值范围.





感谢您的观看

北京市朝阳区教育研究中心 制作

