函数与导数综合问题专题

——函数极值问题

对外经贸大学附属中学　徐凤茹

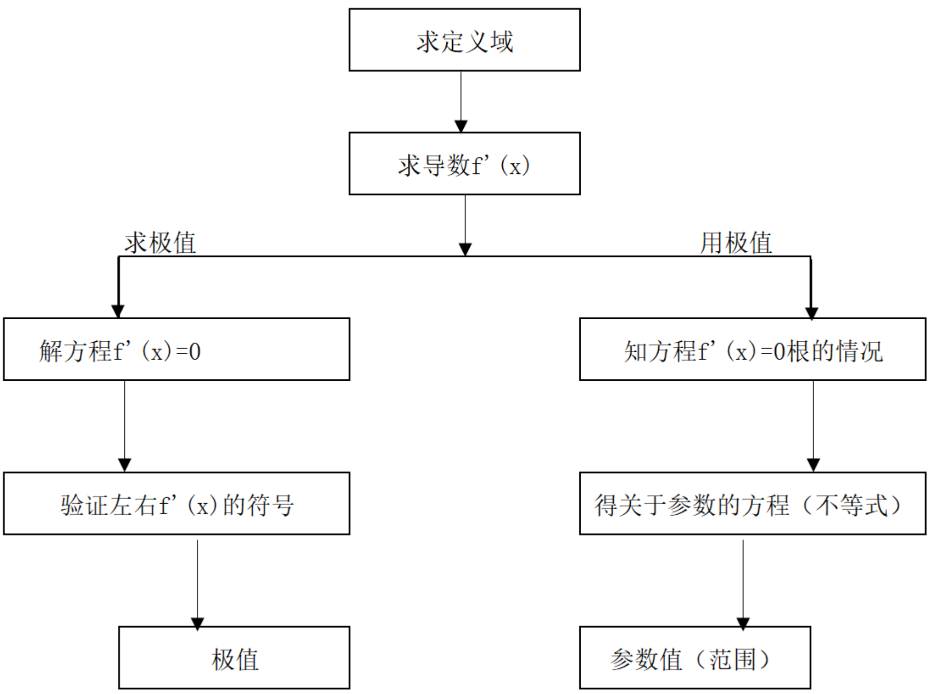
一、学习目标：

1. 能利用导数解决函数的极值问题，并梳理出与函数极值有关问题的策略；
2. 通过对极值定义的“再认识”，研究对象的“再选择”优化解题方法及步骤，提高分析问题，解决问题的能力。
3. 在学习的过程中，梳理出解决问题的方法，能够利用直观想象探讨问题的本质及其数学的联系，培养了良好的数学学习习惯。

二、预备知识：

1. 常见的基本初等函数的导数公式

2、利用导数研究函数问题的一般流程：



三、典型例题

例 1 已知函数$f(x)=x\ln(x+1)-ax^2(a\in R)$

（I）求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0)$处的切线方程；

（II）当$a<0$时，求证：函数$f(x)$存在极小值.

（Ⅰ）分析：

明确求切线方程的方法和步骤：1、求切点 2、利用$k=f'(x)$求斜率

3、用点斜式求出切线方程

解：因为$f(0)=0\ln(0+1)-a\cdot 0^2=0$

所以切点的坐标为$(0,0)$

因为$f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}-2ax$

$k=f'(0)=\ln(0+1)+\frac{0}{0+1}-2a\cdot 0=0$

所以切线的斜率$k=0$，

代入点斜式方程$y-y_0=k(x-x_0)$

得到$y-0=0(x-0)$

所以切线的方程为$y=0$

（II）转化方法一：

根据求函数极值的步骤：

1、求定义域

2、求导

3、判断导数恒正或恒负，否则求$f'(x)=0$的解

4、若不能确定导数恒正负，也不会求$f'(x)=0$的解那么求函数的二阶导数

5、利用二阶导数的正负确定一阶导数的增减，在确定一阶导数的正负，进而确定原函数的单调性，即可得出函数得极值。

（Ⅱ）**解法一：**

$f(x)$的定义域为$\{x|x>-1\}$

令 $g(x)=f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}-2ax$

$g'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-2a$

因为$x>-1$且$a<0$，

所以$\frac{1}{x+1}>0$，$\frac{1}{(x+1)^2}>0$，$-2a>0$

从而得到$g'(x)>0$在$(-1,+\infty)$上恒成立

所以$f'(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增且$f'(0)=0$，

所以x，$f'(x),f(x)$在区间$(-1,+\infty)$的变化情况如下表：

x	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以$x=0$时，$f(x)$取得极小值，问题得证.

运算难点及突破方法：

1. 求导运算过关，注意观察，不要盲目对导数通分。
2. 能清晰的知道二阶导的正负确定一阶导的单调，只有确定一阶导的正负才能确定原函数单调性，进而确定极值。

转化方法二：

注重判断极值的导数方法，根据第一问的提示$f'(0)=0$，只需讨论$x=0$左右$f'(x)$的正负，再根据导数确定函数的单调性，进而确定极值，即可证出。

解法二：

因为　$f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}-2ax$，　$f'(0)=0$

当$a<0$时，

当$x<0$时，$\ln(x+1)<0$，$\frac{x}{x+1}<0$,　$-2ax<0$所以$f'(x)<0$

当$x>0$时，$\ln(x+1)>0$　，$\frac{x}{x+1}>0,-2ax>0$所以　$f'(x)>0$

所以x，$f'(x),f(x)$在区间$(-1,+\infty)$的变化情况如下表：

x	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以$x=0$时，$f(x)$取得极小值，问题得证.

运算难点及突破方法：

1. 求导运算过关，且不可盲目通分。
2. 注意观察题中问题与问题间的联系，对极小值的概念理解到位，进而能注意到求解第一问时得到得结论$f'(0)=0$，只需讨论$x=0$左右$f'(x)$的正负，而不是只模式化按着求极值的步骤做题。

转化方法三：

利用极值的概念，根据第一问的提示$f(0)=0$，确定$x=0$附近的都比$f(x)$大，即可证出。

解法三：

因为$f(x)=x\ln(x+1)-ax^2$,

又因为$f(0)=0$, $a<0$

当 $-1<x<0$ 时， $x\ln(x+1)>0$， $-ax^2>0$， 所 以 $f(x)>0$ ，$f(x)>f(0)$

当$x>0$时，$x\ln(x+1)>0$，$-ax^2>0$， 所以$f(x)>0$，$f(x)>f(0)$

所以$x=0$时，$f(x)$取得极小值，问题得证.

运算难点及突破方法：

1. 极值的基本概念掌握的扎实，清楚极值是函数局部的最值。
2. 注意观察函数表达式的特征，对极小值的概念理解到位，进而能注意求解第一问时$f(0)=0$, $x=0$左右的函数值都比$f(0)=0$大。

四、小结提升：（解题策略及注意事项）

1. 本节课通过对函数极值问题的分析，可以帮助我们加深对极值基本概念的理解；

2. 极值是函数的局部最值，在研究极值问题时我们应该更多的关注函数的局部性质；

3. 通过例题的讲解，明确解决导数问题的三大策略：明确对象，正确分类，恰当讨论；

4. 审题，申请条件及隐含条件与要求的问题的之间的关系，基本概念一定要扎实。

五、本专题学法指导：

1. 导数问题求导是第一关，务必计算准确。
2. 导数是解决函数问题的工具，要明确研究的问题是什么，求导的目的是什么，而不是套模式。
3. 认真审题，努力挖掘题中条件与结论之间的内在联系，进而能简化解题过程。