朝阳区线上课堂·高三年级数学

函数与导数综合专题
——函数的单调性问题

对外经济贸易大学附属中学（北京市第九十四中学）

顾　岚

学习目标

知识

能熟练使用求导公式，能准确推出函数的单调性与导数的关系.

策略

掌握用导数求函数单调区间，及已知单调性确定参数范围问题的解法.

能力

巩固提升分类讨论思想和分析问题、解决问题的能力.

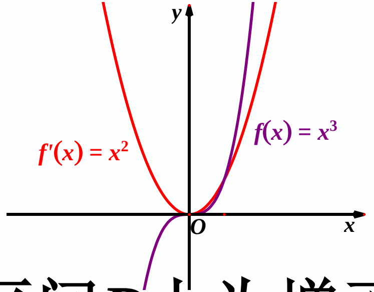
预备知识

必备概念

1 常见的基本初等函数的导数公式题

2 导数符号与函数单调性的关系

导数符号与函数单调性的关系



（1）在区间D上满足$f'(x)>0$<u> ⇒ </u>$f(x)$在区间D上为增函数；

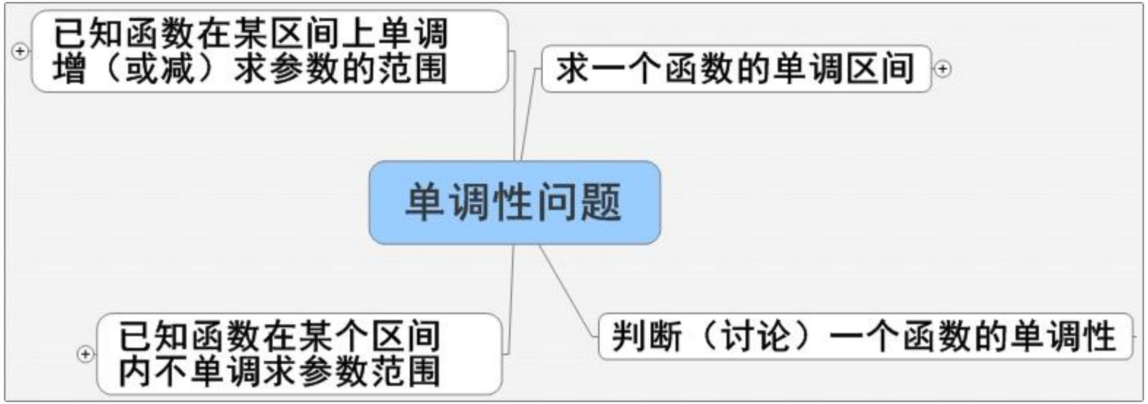
（2）在区间D上满足$f'(x)\geq 0$<u> ⇐ </u>$f(x)$在区间D上为增函数；

（3）"$f'(x)>0$"是"$f(x)$是增函数"的<u>充分不必要</u>条件；

"$f'(x)\geq 0$"是"$f(x)$是增函数"的<u>必要不充分</u>条件.

预备知识

常见问题


单调性问题
已知函数在某区间上单调增（或减）求参数的范围
求一个函数的单调区间
已知函数在某个区间内不单调求参数范围
判断（讨论）一个函数的单调性

典型例题

【例】已知函数$f(x)=x+\frac{a}{x}+lnx\ (a\in R)$

（I）求函数$f(x)$的单调区间；

（II）若函数$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，求a的取值范围；

（III）若函数$f(x)$在$(1,+\infty)$上不单调，求a的取值范围.

【例】已知函数$f(x)=x+\frac{a}{x}+lnx(a\in R)$

（I）求函数$f(x)$的单调区间.

解题思路

一步求函数定义域；

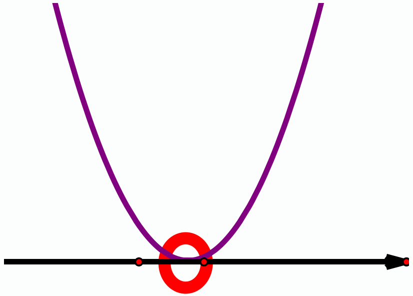
二步求导函数；

三步根据导函数图像判断导函数符号及原函数单调性.

解题难点

找准参数的讨论点，对含有参数的函数单调性进行讨论.

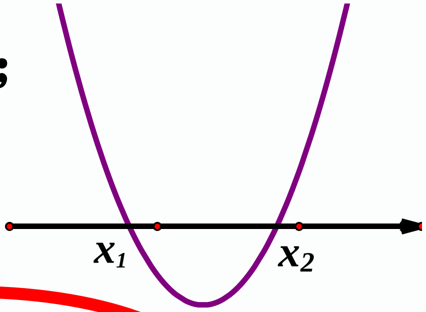
【解】（I）易知$f(x)$的定义域是$(0,+\infty)$，



$$f'(x)=1-\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{\boxed{x^2+x-a}}{x^2}.$$

当$\Delta=1+4a\le 0$，即$a\le-\frac{1}{4}$时，$x^2+x-a\ge 0$，

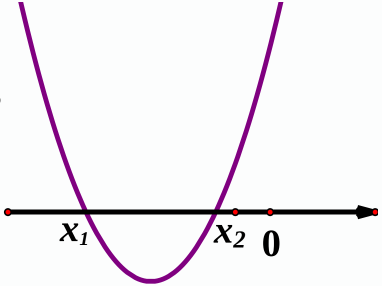
所以$f'(x)\ge 0$，则$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；



当$\Delta=1+4a>0$，即$a>-\frac{1}{4}$时，

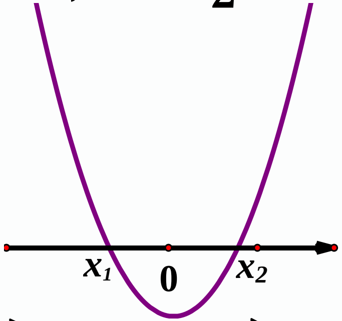
令$f'(x)=0$解得$x_1=\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}<0$，$x_2=\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}$

①当$-\frac{1}{4} < a \leq 0$时，$x_2 \leq 0$，所以$f'(x) > 0$，



则$f(x)$在$(0, +\infty)$上单调递增；

②当$a > 0$时，$x_2 > 0$，则



x	$(0,x_2)$	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

综上，当$a \leq 0$时，$f(x)$在$(0, +\infty)$上单调递增；

当$a > 0$时，$f(x)$在$\left(0, \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}\right)$上单调递减，

在$\left(\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}, +\infty\right)$上单调递增.

【小结】

二次型含参问题的关注点：

$$\text{二次项系数}a\begin{cases} a=0 \\ \left.\begin{array}{l} a>0 \\ a<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \Delta \le 0 \\ \Delta > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 > x_2 \\ x_1 < x_2 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

一看二次项系数，二看判别式，三比两根大小

【例】已知函数$f(x)=x+\frac{a}{x}+lnx(a\in R)$

（I）求函数$f(x)$的单调区间.

解题思路

一步求函数定义域；

二步求导函数；

三步根据导函数图像判断导函数符号及原函数单调性.

解题难点

找准参数的讨论点，对含有参数的函数单调性进行讨论.

解题易错

①忽略函数的单调区间是其定义域的子集；

②不讨论导数零点与区间关系；

③多个增减区间错误使用∪，“或”连接.

【例】已知函数$f(x)=x+\frac{a}{x}+lnx(a\in R)$

（II）若函数$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，求a的取值范围.

解题思路

一是可以利用第（I）问结论求解；

二是利用“$f(x)$是增函数$\Rightarrow f'(x)\geq 0$”转化为恒成立问题求解.

解题难点

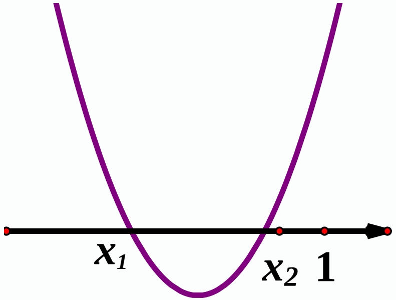
转化为更简单的等价不等式恒成立问题再求解.

【解】（II）解法一：由（I）知，

当$a \le 0$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，满足条件；

当$a > 0$时，$f(x)$在$\left(0,\dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}\right)$上单调递减，在

$\left(\dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2},+\infty\right)$上单调递增；



因为$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以$\dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2} \le 1$解得$0 < a \le 2$.

综上，当$a \le 2$时，$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增.

$$f'(x) = 1 - \frac{a}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x^2+x-a}{x^2}.$$

解法二：

因为$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，所以$f'(x) \geq 0$在$(1,+\infty)$上恒成立，即$x^2 + x \geq a$在$(1,+\infty)$上恒成立.

设$g(x) = x^2 + x = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}(x > 1)$，

所以$a \leq g(x)_{min}$即可.

因为$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，则$g(x) > g(1) = 2$

所以，当$a \leq 2$时，$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增.

【例】已知函数$f(x)=x+\frac{a}{x}+lnx(a\in R)$

（II）若函数$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，求a的取值范围.

解题思路

一是可以利用第（I）问结论求解；

二是利用“$f(x)$是增函数$\Rightarrow f'(x)\geq 0$”转化为恒成立问题求解.

解题难点

转化为更简单的等价不等式恒成立问题再求解.

解题易错

①先求单调区间，再讨论给定区间的增减性，提高了计算量和难度；

②将单调递增转化为$f'(x)\geq 0$恒成立时，忽略了“=”条件.

【例】已知函数$f(x)=x+\frac{a}{x}+lnx(a\in R)$

（III）若函数$f(x)$在$(1,+\infty)$上不单调，求a的取值范围.

解题思路

一是可以利用第（I）问结论求解；

二是转化$f'(x)$在区间内（不含边界）有变号零点问题求解.

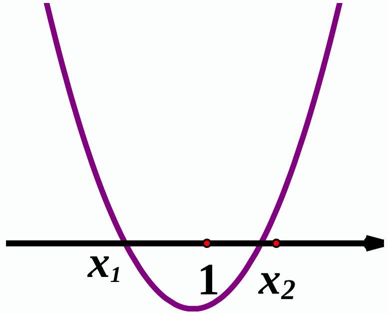
解题难点

转化为导数变号零点时，借助二次函数图像，运用根的分布分析问题.

【解】（III）解法一：由（I）知，$f'(x)=\frac{x^2+x-a}{x^2}$.

当$a\le 0$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，不满足条件；

当$a>0$时，$f(x)$在$\left(0,\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2},+\infty\right)$上单调递增；

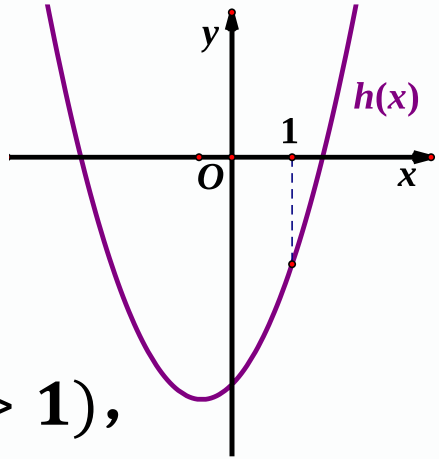


因为$f(x)$在$(1,+\infty)$上不单调，

所以$\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}>1$解得$a>2$，

综上，当$a>2$时，$f(x)$在$(1,+\infty)$上不单调.

解法二： $f'(x)=\dfrac{x^2+x-a}{x^2}.$



因为$f(x)$在$(1,+\infty)$上不单调，

所以$f'(x)$在$(1,+\infty)$内有变号零点.

又因为$x^2>0$，所以设$h(x)=x^2+x-a(\mathrm{x}>1)$，

即$h(x)$在$(1,+\infty)$内有变号零点.

所以$\begin{cases}\Delta=1+4a>0\\ h(1)=2-a<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>-\frac{1}{4}\\ a>2\end{cases}$即$a>2$；

所以，当$a>2$时，$f(x)$在$(1,+\infty)$上不单调.

【例】已知函数$f(x)=x+\frac{a}{x}+lnx(a\in R)$

（III）若函数$f(x)$在$(1,+\infty)$上不单调，求a的取值范围.

解题思路

一是可以利用第（I）问结论求解；

二是利用转化$f'(x)$在区间内（不含边界）有变号零点问题求解.

解题难点

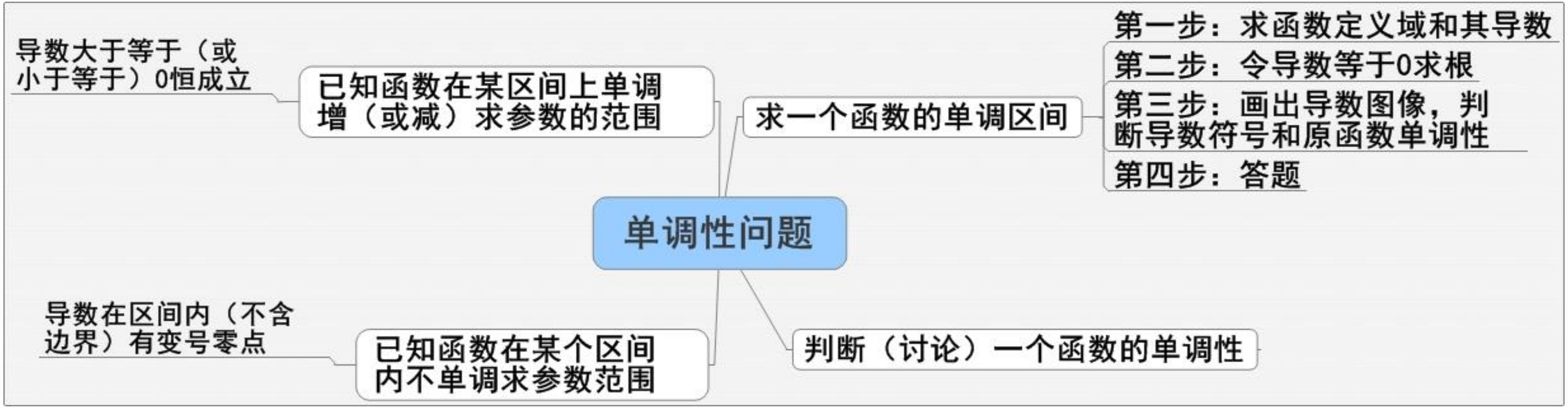
借助二次函数图像，运用根的分布分析问题.

解题易错

①直接用第（II）的补集求结论，不分析该区间内不可能单调递减；

②利用求根公式求导数零点，计算量大，讨论复杂，不对判别式讨论.

小结提升


单调性问题
求一个函数的单调区间
第一步：求函数定义域和其导数
第二步：令导数等于0求根
第三步：画出导数图像，判断导数符号和原函数单调性
第四步：答题
判断（讨论）一个函数的单调性
已知函数在某区间上单调增（或减）求参数的范围
导数大于等于（或小于等于）0恒成立
已知函数在某个区间内不单调求参数范围
导数在区间内（不含边界）有变号零点

学法建议

研究函数的单调性，必须优先考虑函数的定义域，这是重中之重；

关注各类问题的解析策略，但也不能一味“死记硬背”，要根据题目给出的函数特点，前后问的关系，灵活运用方法求解；

要注意分类讨论和数形结合思想的应用.

【课后作业】

（1）函数 $f(x)=e^{x}\cos x$ 的单调递减区间为____________.

（2）函数 $f(x)=4x^{2}+\dfrac{1}{x}$ 的单调减区间是________.

（3）函数 $f(x)=x^{2}-2bx+6$ 在区间 $(2,8)$ 内不单调, 则实数 b 的取值范围是________.

（4）三次函数 $y=x^{3}-ax^{2}+ax-3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是增函数, 则实数 a 的取值范围是________.

（5）若函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^{2}+x\ln x-x$ 存在单调递增区间，则 a 的取值范围是____________.

（6）已知函数 $f(x)=x^{2}-\left(a+2\right)x+a\ln x\left(a\in R\right)$, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

（7）已知函数 $f(x)=\ln x-xe^{x}+ax(a\in\mathbf{R})$.

（I）若函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，求实数 a 的取值范围；

（II）若 $a=1$，求 $f(x)$ 的最大值.

谢谢您的观看

北 京 市 朝 阳 区 教 育 研 究 中 心　　制 作