《函数与导数综合专题》单元检测答案

1.【解析】$f'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2}{x}(x>0)$，

令$f'(x)\le 0$，解得：$0<x\le 1$.

故选 A.

2. B

3.【解析】 $f'(x)=ax+\ln x$，

∴ $f'(x)>0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上成立，

即 $ax+\ln x>0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上成立，

即 $a>-\frac{\ln x}{x}$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上成立.

令 $g(x)=-\frac{\ln x}{x}$，则 $g'(x)=-\frac{1-\ln x}{x^2}$，

∴$g(x)=-\frac{\ln x}{x}$ 在（0，e）上单调递减，在（e，+∞）上单调递增，

∴$g(x)=-\frac{\ln x}{x}$ 的最小值为 $g(\mathrm{e})=-\frac{1}{\mathrm{e}}$，

∴$a>-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

故选 B.

4.【解析】

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+(a+1)x^2-(a^2+a-3)x\Rightarrow f'(x)=x^2+2(a+1)x-(a^2+a-3)$，

由题意可知 $f'(1)=0$，即$1+2(a+1)-(a^2+a-3)=0\Rightarrow a=3$ 或 $a=-2$，

当 $a=3$ 时， $f'(x)=x^2+2(a+1)x-(a^2+a-3)=x^2+8x-9=(x+9)(x-1)$，

当 $x>1$ 或 $x<-9$ 时， $f'(x)>0$，函数单调递增；当 $-9<x<1$ 时， $f'(x)<0$，函数单调递减，

显然 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极值点；

当 $a=-2$ 时， $f'(x)=x^2+2(a+1)x-(a^2+a-3)=x^2-2x+1=(x-1)^2\ge 0$，

所以函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数，没有极值，不符合题意，舍去.

故 $a=3$.

故选 B.

5.【解析】(-1，11）

6.【解析】若函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}+a\mathrm{e}^{-x}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，则 $f'(x)=\mathrm{e}^{x}-a\mathrm{e}^{-x}\geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，

即 $a\leq \mathrm{e}^{2x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，

又 $\mathrm{e}^{2x}>0$，则 $a\leq 0$，

即实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,0\right]$.

7【解析】(1) $f\left(x\right)=\ln x-ax$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-a$，

当 $a>0$ 时，解 $f'(x)=\frac{1}{x}-a>0$ 得 $0<x<\frac{1}{a}$，解 $f'(x)=\frac{1}{x}-a<0$ 得 $x>\frac{1}{a}$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，

所以函数 $f(x)$ 有极大值点，为 $\frac{1}{a}$，无极小值点.

8 解：$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-1+\dfrac{a}{x}=-\dfrac{x^2-ax+1}{x^2}$.

（i）若 $a\leq 2$，则 $f'(x)\leq 0$，当且仅当 $a=2$，$x=1$ 时 $f'(x)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减.

（ii）若 $a>2$，令 $f'(x)=0$ 得，$x=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ 或 $x=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$.

当 $x\in(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})\cup(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 时，$f'(x)>0$. 所以 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}),(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$ 单调递减，在 $(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 单调递增.

9.【解析】（1）设 $g(x)=f'(x)$，则 $g(x)=\cos x-\dfrac{1}{1+x}$， $g'(x)=-\sin x+\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

当 $x\in\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$时， $g'(x)$单调递减，而 $g'(0)>0, g'(\dfrac{\pi}{2})<0$，可得 $g'(x)$在$\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$有唯一零点，
设为α.

则当 $x\in(-1,\alpha)$时， $g'(x)>0$；当 $x\in\left(\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right)$时， $g'(x)<0$.

所以 $g(x)$ 在 $(-1,\alpha)$ 单调递增，在$\left(\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right)$单调递减，故 $g(x)$ 在$\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$存在唯一极大值点，即 $f'(x)$ 在$\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$存在唯一极大值点.