



朝阳区线上课堂·高三年级数学

函数的零点问题

北京市朝阳外国语学校 富艳姿



零点问题分类

1. 求函数 $f(x)$ 的零点——方程

2. 研究函数 $f(x)$ 的零点个数——函数的图像

3. 研究函数 $f(x)$ 的零点的位置——零点存在性定理

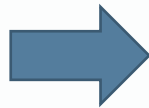
引入

引入：求下列函数的零点个数：

(1) 函数 $f(x) = 2^x - 1$ 的零点个数是_____；

(2) 函数 $f(x) = 2^x - x^2$ 的零点个数是_____；

(3) 函数 $f(x) = \frac{x^2}{2^x} - 1$ 的零点个数是_____.



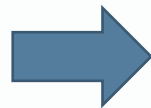
引入

引入：求下列函数的零点个数：

(1) 函数 $f(x)=2^x-1$ 的零点个数是 1;

方法1.

令 $f(x)=0$, 即 $2^x-1=0$, 得 $x=0$



引入

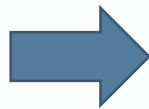
引入：求下列函数的零点个数：

(1) 函数 $f(x) = 2^x - 1$ 的零点个数是 1;

(2) 函数 $f(x) = 2^x - x^2$ 的零点个数是 3;

方法1. 令 $f(x) = 0$, 即 $2^x = x^2$,

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = ?$$



引入

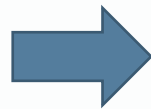
引入：求下列函数的零点个数：

(1) 函数 $f(x) = 2^x - 1$ 的零点个数是 1； 令 $f(x) = 0$, 即 $\frac{x^2}{2^x} = 1$,

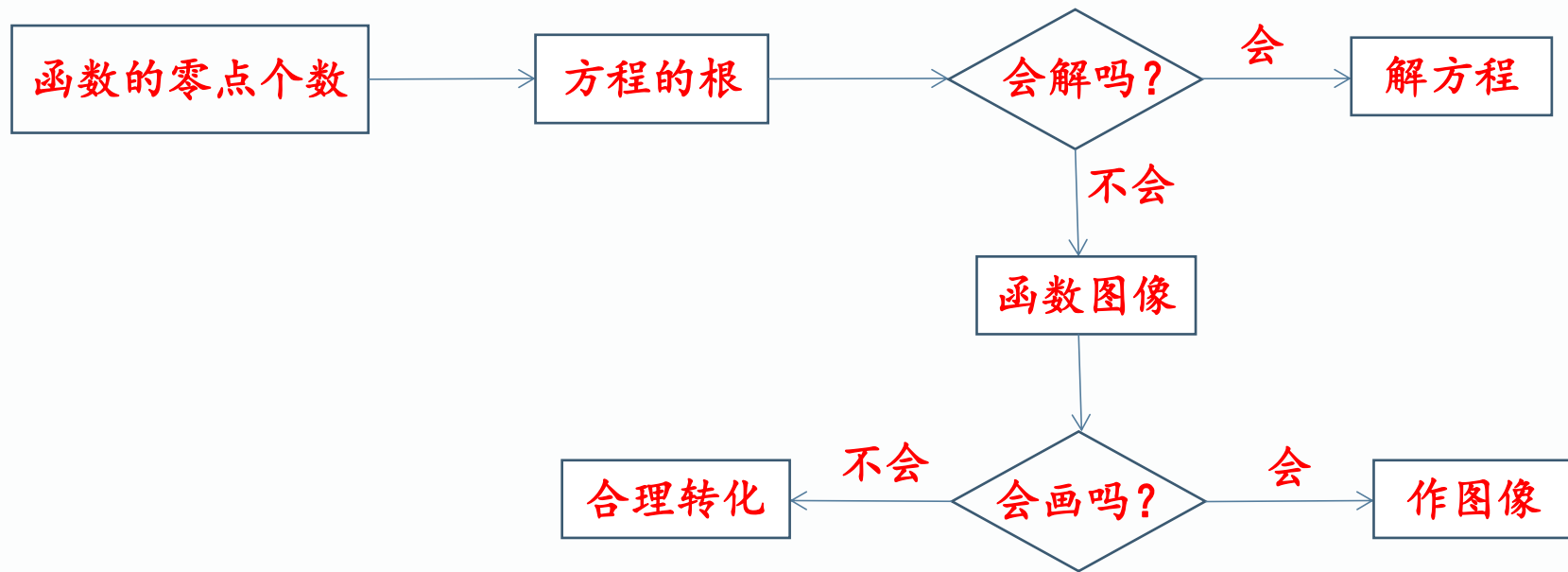
(2) 函数 $f(x) = 2^x - x^2$ 的零点个数是 3；

得 $2^x = x^2$,

(3) 函数 $f(x) = \frac{x^2}{2^x} - 1$ 的零点个数是 3.



函数零点个数问题的解决方法

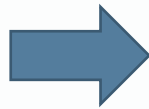


问题1

设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - a, & x < 1, \\ 4(x-a)(x-2a), & x \geq 1. \end{cases}$

①若 $a=1$, 则 $f(x)$ 的最小值为 -1;

②若 $f(x)$ 恰有 2 个零点, 则实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup [2, +\infty)$.

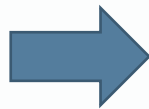


问题1

1. 解决含参函数问题时，我们不知如何分类的情况下，可以给参数赋几个特殊值，先从特殊出发，再探索一般性的规律。
2. 由于参数在变，图像也在变，我们需要对参数进行分类讨论，分类要尽量简洁、清晰，先整体把握再作图分析。

问题2

已知 x 为实数， $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，函数 $f(x) = x - [x]$ ，
则方程 $f(x) = \log_5|x|$ 的根有_____个.



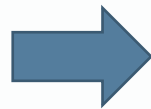
当 $x \in [0,1)$ 时, $[x]=0$

当 $x \in [1,2)$ 时, $[x]=1$

当 $x \in [-1,0)$ 时, $[x]=-1$

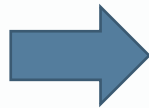
.....

$$f(x) = x - [x] = \begin{cases} \dots \\ x, x \in [0,1) \\ x-1, x \in [1,2) \\ x+1, x \in [-1,0) \\ \dots \end{cases}$$



问题2

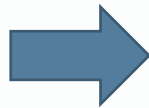
已知 x 为实数， $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，函数 $f(x) = x - [x]$ ，
则方程 $f(x) = \log_5|x|$ 的根有 8 个.



变式

已知函数 $f(x)=x-[x]$, 其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数,
若关于 x 的方程 $f(x)=kx+k$ 有三个不同的实根,
则实数 k 的取值范围是_____.

$$\left(-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$$

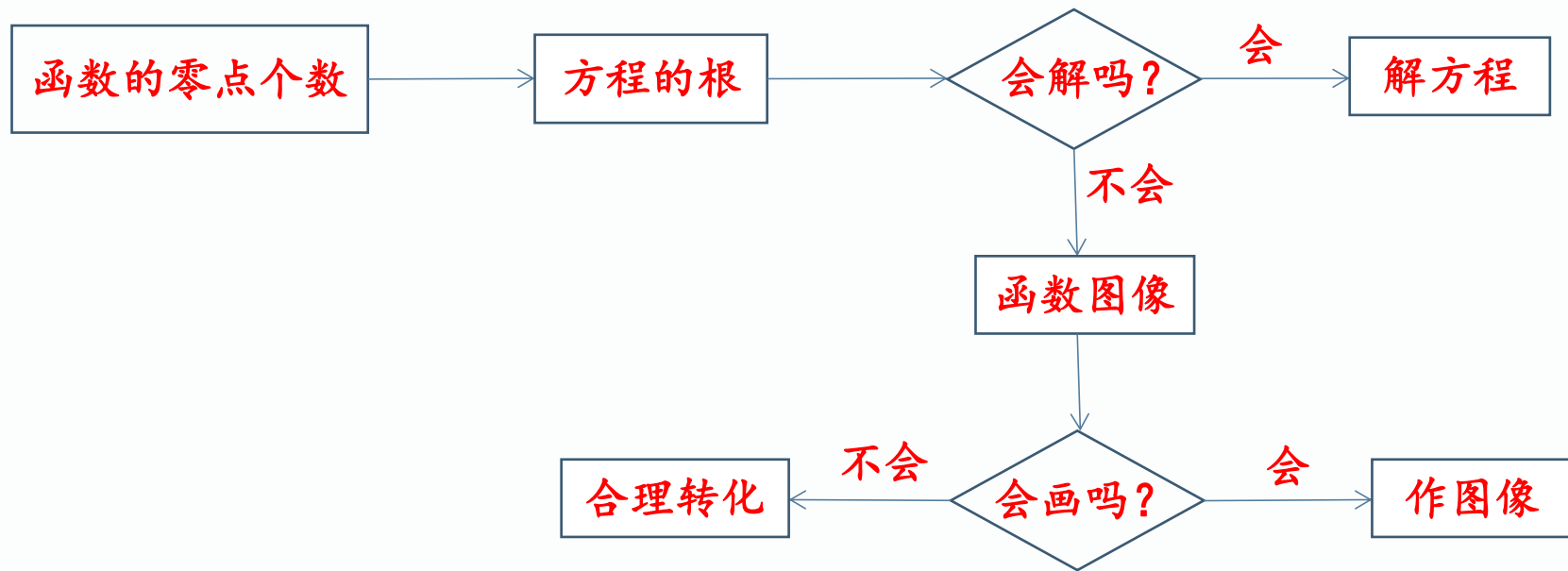


小结

数形结合包括：以形助数和以数辅形两方面，既要进行几何的直观分析，又要进行相应的代数抽象探求。

在解决函数零点个数问题时，如果只研究图形有时会出错，例如引入中的问题2；如果只研究方程，一些复杂的问题得不到有效地解决，今天大部分问题都要借助函数图像解决。

小结





感谢您的观看

北京市朝阳区教育研究中心 制作