

【扩展提升任务】

1. 解析: 由 $f(x) = \begin{cases} 2-|x|, & x \leq 2, \\ (x-2)^2, & x > 2, \end{cases}$ 得 $f(2-x) = \begin{cases} 2-|2-x|, & x \geq 0, \\ x^2, & x < 0, \end{cases}$

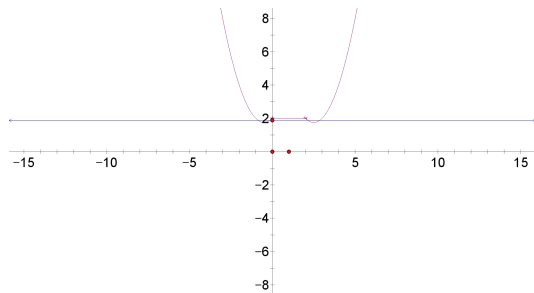
$$\text{所以 } y = f(x) + f(2-x) = \begin{cases} 2-|x| + x^2, & x < 0 \\ 4-|x| - |2-x|, & 0 \leq x \leq 2, \\ 2-|2-x| + (x-2)^2, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{即 } y = f(x) + f(2-x) = \begin{cases} x^2 - x + 2, & x < 0 \\ 2, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 5x + 8, & x > 2 \end{cases}$$

$y = f(x) - g(x) = f(x) + f(2-x) - b$, 所以 $y = f(x) - g(x)$ 恰有 4 个零点等价于方程

$f(x) + f(2-x) - b = 0$ 有 4 个不同的解, 即函数 $y = b$ 与函数 $y = f(x) + f(2-x)$ 的图象的 4 个公共点, 由图象可知

$$\frac{7}{4} < b < 2.$$

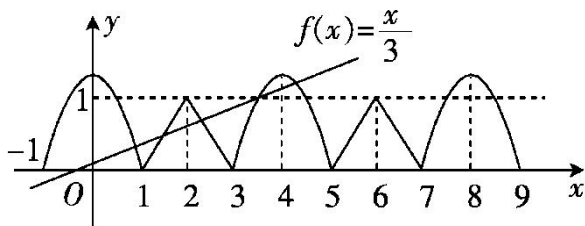


2. 解析: 因为当 $x \in (-1, 1]$ 时, 将函数化为方程 $x^2 + \frac{y^2}{m^2} = 1 (y \geq 0)$, 实质上为一个半椭圆, 其图象如图所示, 同时在坐标系

中作出当 $x \in (-1, 3]$ 的图象, 再根据周期性作出函数其它部分的图象, 由图易知直线 $y = \frac{x}{3}$ 与第二个椭圆

$(x-4)^2 + \frac{y^2}{m^2} = 1 (y \geq 0)$ 相交, 而与第三个半椭圆 $(x-8)^2 + \frac{y^2}{m^2} = 1 (y \geq 0)$ 无公共点时, 方程恰有 5 个实数解, 将

$y = \frac{x}{3}$ 代入 $(x-4)^2 + \frac{y^2}{m^2} = 1 (y \geq 0)$ 得 $(9m^2 + 1)x^2 - 72m^2x + 135m^2 = 0$



令 $t = 9m^2 (t > 0)$, 则 $(t+1)x^2 - 8tx + 15t = 0$. 由 $\Delta = (8t)^2 - 4 \times 15t(t+1) > 0$, 得 $t > 15$, 由 $9m^2 > 15$, 且 $m > 0$

得 $m > \frac{\sqrt{15}}{3}$. 同样由 $y = \frac{x}{3}$ 与第三个椭圆 $(x-8)^2 + \frac{y^2}{m^2} = 1 (y \geq 0)$, 由 $\Delta < 0$ 可计算得 $m < \sqrt{7}$, 综上知 $m \in (\frac{\sqrt{15}}{3}, \sqrt{7})$.