朝阳区线上课堂·高三年级数学

圆锥曲线中的最值、范围问题

北京市陈经纶中学　邢毅春

学习目标：

- 掌握圆锥曲线中的最值、范围问题的基本思路
- 掌握解决圆锥曲线中的最值、取值范围问题构建代数关系式的常见方法

利用几何法

设 P 是椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上一点，M，N 分别是两圆：$(x+4)^2+y^2=1$ 和$(x-4)^2+y^2=1$ 上的点，则$|PM|+|PN|$的最小值、最大值分别为(C)

A．9,12　　B．8,11

C．8,12　　D．10,12

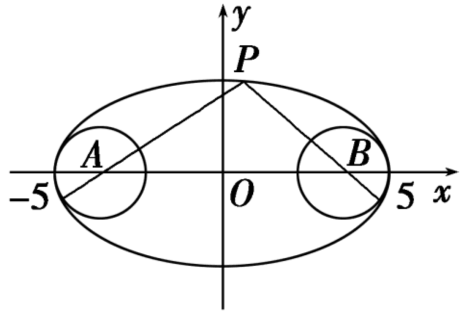
容易想到，
变量（字母）多，
计算量大

思路一：

设$P(x_0, y_0)$，$M(x_1, y_1)$，$N(x_2, y_2)$，则点P的坐标满足：$\frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{9}=1$

$$|PM|+|PN|=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}+\sqrt{(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2}=\cdots$$

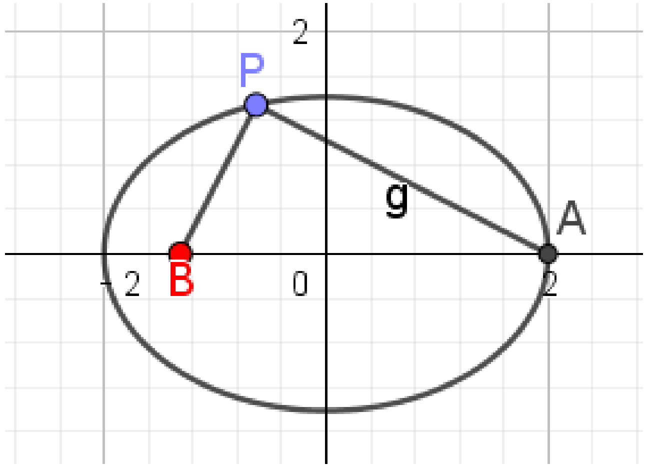
思路二：结合题意，数形结合，联系定义



[例 2] 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，以椭圆 C 的任意三个顶点为顶点的三角形的面积是 $2\sqrt{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程； $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

（Ⅱ）设 A 是椭圆 C 的右顶点，点 B 在 x 轴上．若椭圆 C 上存在点 P，使得 $\angle APB=90^\circ$，求点 B 横坐标的取值范围．



$$\left\{\begin{aligned}&\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\&ab=2\sqrt{2}\\&a^2=b^2+c^2\end{aligned}\right. \Longrightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$

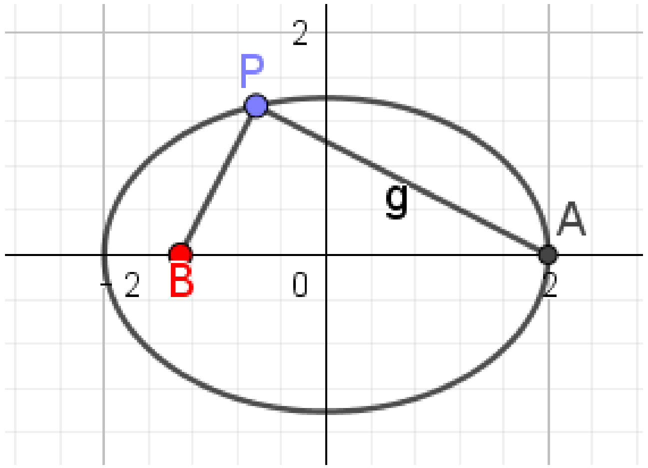
$k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$

……

[例 2] 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，以椭圆$C$的任意三个顶点为顶点的三角形的面积是$2\sqrt{2}$.

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$$

（Ⅱ）设A是椭圆C的右顶点，点B在x轴上．若椭圆C上存在点P，使得$\angle APB=90^\circ$，求点B横坐标的取值范围．



依题意，$A(2,0)$．设$B(t,0)$，$P(m,n)$，

则$m^2+2n^2=4$，

且$(2-m,-n)\cdot(t-m,-n)=0$，

即$(2-m)(t-m)+n^2=0$． **?**

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$$

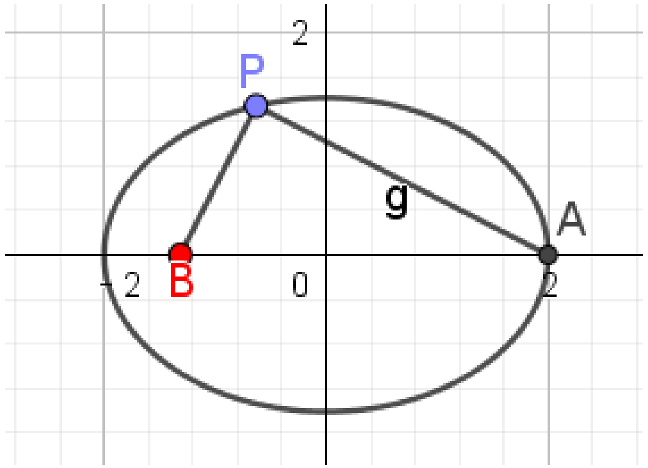
$$k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$$

……

[例 2] 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，以椭圆 C 的任意三个顶点为顶点的三角形的面积是 $2\sqrt{2}$.

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$$

（Ⅱ）设 A 是椭圆 C 的右顶点，点 B 在 x 轴上．若椭圆 C 上存在点 P，使得 $\angle APB=90^\circ$，求点 B 横坐标的取值范围.



依题意，$A(2,0)$．设 $B(t,0)$，$P(m,n)$，

则 $m^2+2n^2=4$，

且 $(2-m,-n)\cdot(t-m,-n)=0$，

即 $(2-m)(t-m)+n^2=0$．

?

将 $n^2=\frac{4-m^2}{2}$ 代入上式，

得 $(2-m)(t-m)+\frac{4-m^2}{2}=0$

因为 $-2<m<2$，

所以 $t-m+\frac{2+m}{2}=0$，

$$t-m+\frac{2+m}{2}=0$$

即 $m=2t+2$.

所以 $-2<2t+2<2$,

解得 $-2<t<0$,

$$t=\frac{m-2}{2}$$

因为 $-2<m<2$,

解得 $-2<t<0$,

所以 点 B 横坐标的取值范围是 $(-2,0)$.

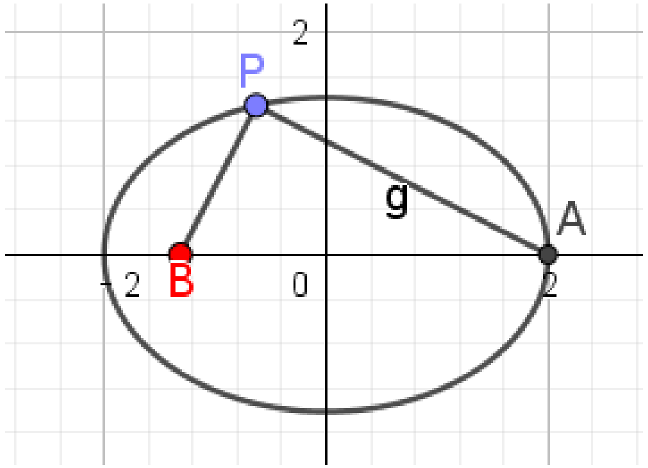
注：详细答案参见“资料包”“01文件夹教学案”

利用代数法

[例 2]　（2018 西一文）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，以椭圆 C 的任意三个顶点为顶点的三角形的面积是 $2\sqrt{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；$\boxed{\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1}$

（Ⅱ）设 A 是椭圆 C 的右顶点，点 B 在 x 轴上．若椭圆 C 上存在点 P，使得 $\angle APB=90^\circ$，求点 B 横坐标的取值范围．



$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$$

$$k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$$

……

归纳小结1：

圆锥曲线中的最值、范围问题类型较多，解法灵活多变，但总体上主要有两种方法：

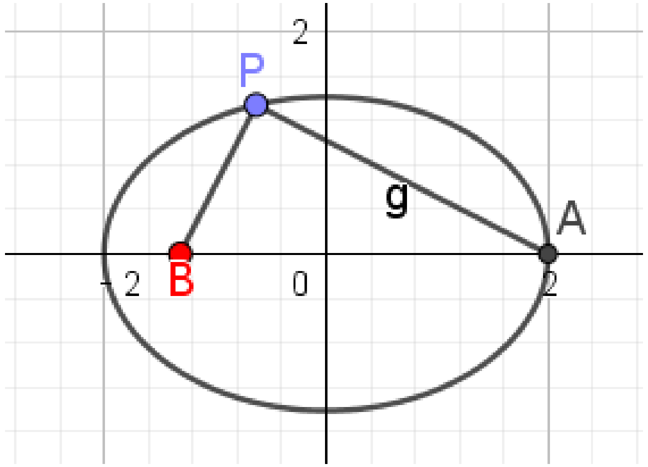
- 一是利用几何法，即通过利用曲线的定义、几何性质以及平面几何中的定理、性质等进行求解；
- 二是利用代数法，即把要求最值的几何量或代数表达式表示为某个(些)参数的函数(解析式)，然后利用函数方法、不等式方法等进行求解.

利用代数法

[例 2]　（2018 西一文）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，以椭圆 C 的任意三个顶点为顶点的三角形的面积是 $2\sqrt{2}$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程； $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$

（Ⅱ）设 A 是椭圆 C 的右顶点，点 B 在 x 轴上．若椭圆 C 上存在点 P，使得 $\angle APB=90^\circ$，求点 B 横坐标的取值范围．



思考：本题还有其他解法么？

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$

$k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$

……

[例 3]　已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，且以原点为圆心，椭圆的焦距为直径的圆与直线 $x\sin\theta+y\cos\theta-1=0$ 相切(θ 为常数).

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)若椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_2 作直线 l 与椭圆交于 M，N 两点，求$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}$的取值范围.

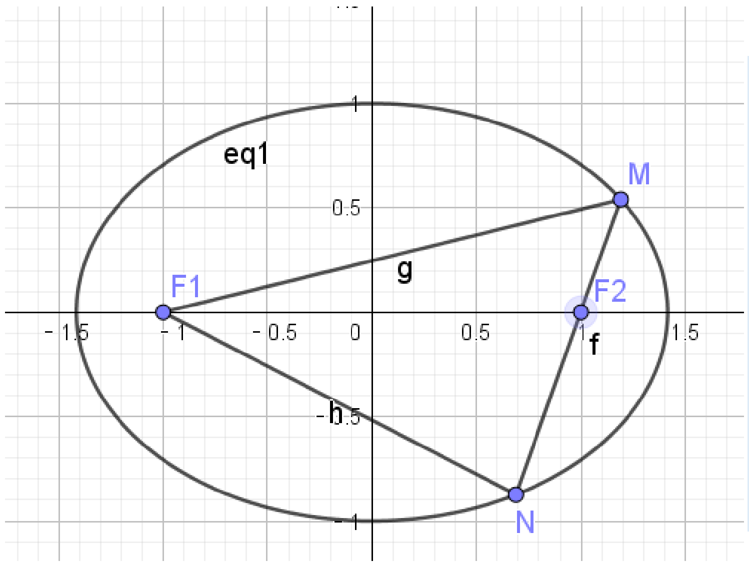
(1)由题意，得$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \frac{1}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=c,\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$　解得$\begin{cases}c=1,\\ a^2=2,\\ b^2=1,\end{cases}$

故椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

[例 3] 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，且以原点为圆心，椭圆的焦距为直径的圆与直线 $x\sin\theta+y\cos\theta-1=0$ 相切(θ 为常数).

$\frac{x^2}{2}+y^2=1$

(2)若椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_2 作直线 l 与椭圆交于 M，N 两点，求$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}$的取值范围.



①若直线 l 的斜率不存在，

则直线 $l\perp x$ 轴，直线 l 的方程为 $x=1$，不妨记 $M\left(1,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$N\left(1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

$\therefore \overrightarrow{F_1M}=\left(2,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{F_1N}=\left(2,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

故$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}=\frac{7}{2}$.

②若直线 l 的斜率存在，

设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，

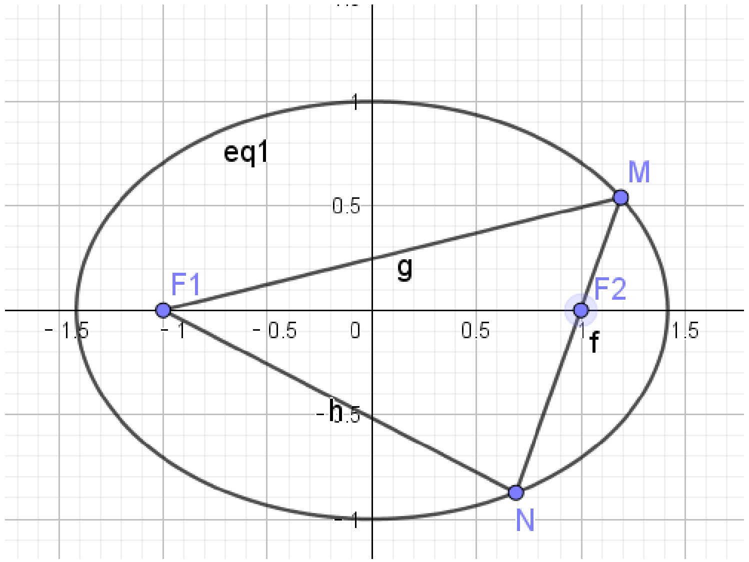
由$\begin{cases} y=k(x-1), \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$消去 y 得，$(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$，

设 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2k^2-2}{1+2k^2}$.①

[例 3]　已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，且以原点为圆心，椭圆的焦距为直径的圆与直线 $x\sin\theta+y\cos\theta-1=0$ 相切(θ 为常数).

$$\frac{x^2}{2}+y^2=1$$

(2)若椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_2 作直线 l 与椭圆交于 M，N 两点，求$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}$的取值范围.



$\overrightarrow{F_1M}=(x_1+1，y_1)$，$\overrightarrow{F_1N}=(x_2+1，y_2)$，

则$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}=(x_1+1)(x_2+1)+y_1y_2$

$=(x_1+1)(x_2+1)+k(x_1-1)\cdot k(x_2-1)$

$=(1+k^2)x_1x_2+(1-k^2)(x_1+x_2)+1+k^2$，

结合①可得$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}=\frac{2(k^4-1)}{2k^2+1}+\frac{4k^2-4k^4}{2k^2+1}+1+k^2=\frac{7k^2-1}{2k^2+1}$

$$\frac{7k^2-1}{2k^2+1}$$

设 $t=2k^2+1(t\geq 0)$

$$\frac{7k^2-1}{2k^2+1}=\frac{7}{2}-\frac{\frac{9}{2}}{2k^2+1}$$

由 $k^2\geq 0$ 可得$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}\in\left[-1,\ \frac{7}{2}\right)$.

综上可知，$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}$的取值范围是$\left[-1,\ \frac{7}{2}\right]$.

设$T=\frac{7k^2-1}{2k^2+1}$

解得：$k^2=-\frac{T+1}{2T-7}$

由$k^2\geq 0$可得：$T\in\left[-1,\ \frac{7}{2}\right]$

注：详细答案参见“资料包”“01文件夹教学案”

归纳小结2：

构建代数关系式时可考虑的五个方面：

- (1)利用圆锥曲线的几何性质或判别式构造不等关系，从而确定参数的取值范围；
- (2)利用已知参数的范围，求新参数的范围，解这类问题的核心是建立两个参数之间的等量关系；
- (3)利用隐含的不等关系建立不等式，从而求出参数的取值范围；
- (4)利用已知的不等关系构造不等式，从而求出参数的取值范围；
- (5)利用求函数的值域的方法将待求量表示为其他变量的函数，求其值域，从而确定参数的取值范围．

变式：（ $\dfrac{7k^2-1}{2k^2+1}$ ）

$\dfrac{7k^2}{2k^2+1}$　　$\dfrac{7k^2-1}{2k^2}(k\neq 0)$

$\dfrac{7k}{2k^2+1}$　　$\dfrac{7k^2+1}{2k}(k\neq 0)$

$\dfrac{7k^2-1}{2k}(k\neq 0)$　　$\dfrac{7k^4}{2k^2+1}$　　……

作业及拓展提升任务

- (见文件夹)

谢谢您的观看

北京市朝阳区教育研究中心　制作