

1. 解: (1) 依题意, 设椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

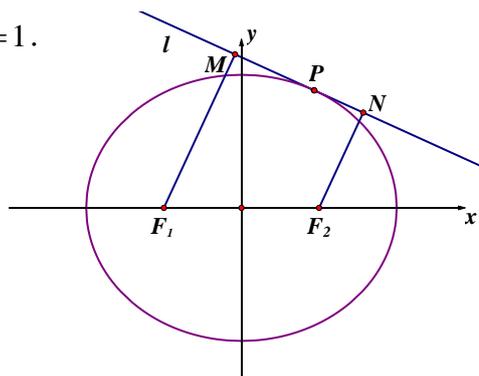
$\because |PF_1|, |F_1F_2|, |PF_2|$ 构成等差数列,

$$\therefore 2a = |PF_1| + |PF_2| = 2|F_1F_2| = 4,$$

$$\therefore a = 2.$$

$$\text{又} \because c = 1, \therefore b^2 = 3.$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$



(2) 将直线 l 的方程 $y = kx + m$ 代入椭圆 C 的方程 $3x^2 + 4y^2 = 12$ 中,

$$\text{得 } (4k^2 + 3)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0.$$

由直线 l 与椭圆 C 仅有一个公共点知,

$$\Delta = 64k^2m^2 - 4(4k^2 + 3)(4m^2 - 12) = 0,$$

$$\text{化简得: } m^2 = 4k^2 + 3.$$

$$\text{设 } d_1 = |F_1M| = \frac{|-k+m|}{\sqrt{k^2+1}}, \quad d_2 = |F_2M| = \frac{|k+m|}{\sqrt{k^2+1}},$$

当 $k \neq 0$ 时, 设直线 l 的倾斜角为 θ ,

$$\text{则 } |d_1 - d_2| = |MN| \times |\tan \theta|,$$

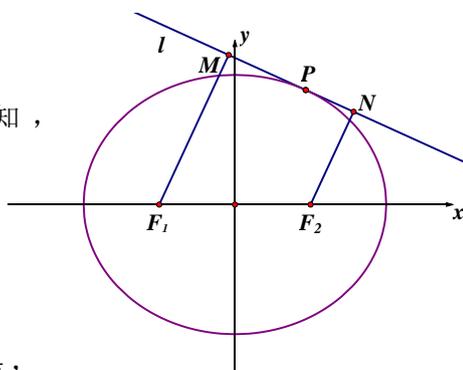
$$\therefore |MN| = \left| \frac{d_1 - d_2}{k} \right|,$$

$$S = \frac{1}{2} \left| \frac{d_1 - d_2}{k} \right| (d_1 + d_2) = \left| \frac{d_1^2 - d_2^2}{2k} \right| = \frac{2|m|}{k^2 + 1} = \frac{2|m|}{\frac{m^2 - 3}{4} + 1} = \frac{8}{|m| + \frac{1}{|m|}},$$

$$\because m^2 = 4k^2 + 3, \therefore \text{当 } k \neq 0 \text{ 时, } |m| > \sqrt{3}, \quad |m| + \frac{1}{|m|} > \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}, \quad S < 2\sqrt{3}.$$

当 $k = 0$ 时, 四边形 F_1MNF_2 是矩形, $S = 2\sqrt{3}$.

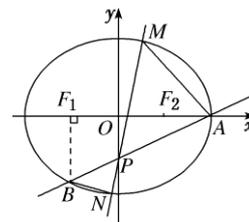
所以四边形 F_1MNF_2 面积 S 的最大值为 $2\sqrt{3}$.



2.

解: (1) 因为 $BF_1 \perp x$ 轴, 所以点 $B(-c, -\frac{b^2}{a})$,

$$\text{所以} \begin{cases} a=2, \\ \frac{b^2}{a(a+c)} = \frac{1}{2}, \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a=2, \\ b=\sqrt{3}, \\ c=1, \end{cases}$$



所以椭圆 C 的标准方程是 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

$$(2) \text{ 因为 } \frac{S_{\triangle PAM}}{S_{\triangle PBN}} = \frac{\frac{1}{2}|PA| \cdot |PM| \cdot \sin \angle APM}{\frac{1}{2}|PB| \cdot |PN| \cdot \sin \angle BPN} = \frac{2 \cdot |PM|}{1 \cdot |PN|} = \lambda \Rightarrow \frac{|PM|}{|PN|} = \frac{\lambda}{2} (\lambda > 2),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{PM} = -\frac{\lambda}{2} \overrightarrow{PN}.$$

由(1)可知 $P(0, -1)$,

设直线 MN 的方程为 $y = kx - 1$ ($k > \frac{1}{2}$),

$M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

$$\text{联立方程, 得} \begin{cases} y = kx - 1, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$$

化简得, $(4k^2 + 3)x^2 - 8kx - 8 = 0$.

$$\text{得} \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{8k}{4k^2 + 3}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-8}{4k^2 + 3}. \end{cases} \quad (*)$$

又 $\overrightarrow{PM} = (x_1, y_1 + 1)$, $\overrightarrow{PN} = (x_2, y_2 + 1)$, 有 $x_1 = -\frac{\lambda}{2}x_2$,

将 $x_1 = -\frac{\lambda}{2}x_2$ 代入(*)可得, $\frac{(2-\lambda)^2}{\lambda} = \frac{16k^2}{4k^2 + 3}$.

因为 $k > \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{16k^2}{4k^2 + 3} = \frac{16}{\frac{3}{k^2} + 4} \in (1, 4)$,

则 $1 < \frac{(2-\lambda)^2}{\lambda} < 4$ 且 $\lambda > 2$, 解得 $4 < \lambda < 4 + 2\sqrt{3}$.

综上所述, 实数 λ 的取值范围为 $(4, 4 + 2\sqrt{3})$.

难点突破指导:

1.几何条件的转化

(1) 第一题中梯形的高 $|MN|$ 不易转化, 面积直接用 $=\frac{1}{2}|MN|(\frac{|-k+m|}{\sqrt{k^2+1}}+\frac{|k+m|}{\sqrt{k^2+1}})$ 计算容易受阻。需将 $|MN|$ 与直线的倾斜角及斜率建立关系。

(2) 第二题中要逐渐体会“斜化平直”的思想, 以及三角形面积公式的灵活运用

2.计算难点: 逐渐积累对绝对值及分式运算的不同方法, 准确运用运算律

3.多变量问题突破: 建立两个参数之间的等量关系式, 并用已知参数表示所求参数。