课题：圆锥曲线中的最值、范围问题

学习目标

1.掌握圆锥曲线中的最值、范围问题的解题基本思路；

2.通过解决圆锥曲线中最值、取值范围问题，探索总结构建代数关系式的常见方法，发展逻辑推理、数学运算等素养。

预备知识：

1.直线与圆锥曲线的位置关系及判断方法

2.求函数最值、值域的常用方法

典型例题

例题 1 设 P 是椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上一点，M，N 分别是两圆：$(x+4)^2+y^2=1$ 和$(x-4)^2+y^2=1$ 上的点，则$|PM|+|PN|$的最小值、最大值分别为(　　)

A．9,12　　　　B．8,11

C．8,12　　　　D．10,12

分析：

思路 1.考虑将题中的几何元素代数化：

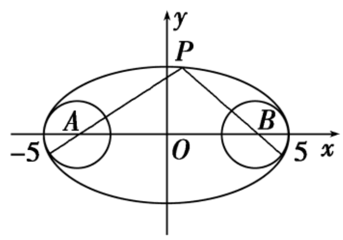
设$P(x_0，y_0)$，$M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，则点 P 的坐标满足：$\frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{9}=1$

则$|PM|+|PN|=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}+\sqrt{(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2}=\cdots$

优缺点：

优点：容易想到，

缺点：变量（字母）多，计算量大



思路 2. 结合题意，数形结合，联系定义

两个圆的圆心恰好是椭圆的焦点，点 P 是椭圆上的动点，　　故满足定义$|PA|+|PB|=2a=10$(定值）．

当 P、A、M 及 P、B、N 分别三点共线时得到最大、最小值，

即$|PM|+|PN|$的最大值是$|PA|+|PB|+2$=12，

$|PM|+|PN|$的最大值是$|PA|+|PB|-2$=8 ．

故选 C.

题后分析：本题代数运算变量多、计算量大，故结合题意及定义利用数形结合的思想解题较便捷

例题 2　已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，以椭圆$C$的任意三个顶点为顶点的三角形的面积是$2\sqrt{2}$．

（I）求椭圆C的方程；

（II）设A是椭圆C的右顶点，点B在x轴上．若椭圆C上存在点P，使得$\angle APB=90^\circ$，求点B横坐标的取值范围.

分析：

1. 对于条件的理解和挖掘：

问题 1：题目的几何条件“$\angle APB = 90^\circ$”可如何转化？（$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，$k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$、勾股定理、圆的性质等）

问题 2：设点坐标后“依题意，$A(2,0)$．设$B(t,0)$，$P(m,n)$，则$(2-m,-n)\cdot(t-m,-n)=0$，

即$(2-m)(t-m)+n^2=0$”得到的多变量关系式如何转化？（消元——通过椭圆方程）

问题 3：消元后得到双变量关系式$t-m+\dfrac{2+m}{2}=0$如何处理？（转化成函数式）

问题 4：本题还有其他思路吗？

2, 解法辨析

解析：

（I）设椭圆C的半焦距为c．依题意，得

$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$ab=2\sqrt{2}$，且$a^2=b^2+c^2$．解得$a=2$，$b=\sqrt{2}$．

所以椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$．

（II）解法一：“椭圆C上存在点P，使得$\angle APB=90^\circ$”等价于“存在不是椭圆左、右顶点的

点P，使得$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$成立”.

依题意，$A(2,0)$．设$B(t,0)$，$P(m,n)$，则$m^2+2n^2=4$，

且$(2-m,-n)\cdot(t-m,-n)=0$，

即$(2-m)(t-m)+n^2=0$．

将$n^2=\dfrac{4-m^2}{2}$代入上式,

得 $(2-m)(t-m)+\dfrac{4-m^2}{2}=0$．

因为$-2<m<2$，

所以$t-m+\dfrac{2+m}{2}=0$，①

即$m=2t+2$．

所以$-2<2t+2<2$，

解得$-2<t<0$，

所以 点B横坐标的取值范围是$(-2,0)$．

或由①：$t=\dfrac{m-2}{2}$，因为$-2<m<2$解得：$-2<t<0$.

解法 2：设 PA 方程是$y=k(x-2)$(显然k存在且$k\neq 0$)，

设$B(t,0)$，$P(m,n)$，

$\begin{cases} y=k(x-2) \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases}$消去 y 得：$(1+2k^2)x^2-8k^2x+(8k^2-4)=0$.

则$2m=\dfrac{8k^2-4}{1+2k^2}$,解得$m=\dfrac{4k^2-2}{1+2k^2}$，$n=k(\dfrac{4k^2-2}{1+2k^2}-2)=\dfrac{-4k}{1+2k^2}$，

即$P(\dfrac{4k^2-2}{1+2k^2},\dfrac{-4k}{1+2k^2})$.

则 PB 方程是：$y-\dfrac{-4k}{1+2k^2}=-\dfrac{1}{k}(x-\dfrac{4k^2-2}{1+2k^2})$.

令 y=0 得：$t=\dfrac{-2}{1+2k^2}$.

由$k^2>0$可得：$-2<t<0$.

小结提升 1：

圆锥曲线中的最值、范围问题类型较多，解法灵活多变，但总体上主要有两种方法：

一是利用几何法，即通过利用曲线的定义、几何性质以及平面几何中的定理、性质等进行求解；

二是利用代数法，即把要求最值的几何量或代数表达式表示为某个(些)参数的函数(解析式)，然后利用函数方法、不等式方法等进行求解.

例 3　已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且以原点为圆心，椭圆的焦距为直径的圆与直线$x\sin\theta+y\cos\theta-1=0$相切($\theta$为常数).

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)若椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_2 作直线 l 与椭圆交于 M，N 两点，求$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}$的取值范围.

设置意图：

(1)化解难点、突出重点：本题是向量条件，不用过多方法，利用坐标比较简单便捷；

(2)重点突破分式函数求最值的一般性方法；

(3)利用变式激活思维、突出本质.

[解]　(1)由题意，得$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \dfrac{1}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=c,\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$　　解得$\begin{cases}c=1,\\ a^2=2,\\ b^2=1,\end{cases}$

故椭圆 C 的标准方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)由(1)得 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$.

①若直线 l 的斜率不存在，则直线 $l\perp x$ 轴，直线 l 的方程为 $x=1$，不妨记 $M\left(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$N\left(1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

$\therefore \overrightarrow{F_1M}=\left(2,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{F_1N}=\left(2,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

故$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}=\dfrac{7}{2}$.

②若直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，

由$\begin{cases}y=k(x-1),\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$

消去 y 得，$(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}$.①

$\overrightarrow{F_1M}=(x_1+1,y_1)$，$\overrightarrow{F_1N}=(x_2+1,y_2)$，

则$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}=(x_1+1)(x_2+1)+y_1y_2=(x_1+1)(x_2+1)+k(x_1-1)\cdot k(x_2-1)=(1+k^2)x_1x_2+(1-k^2)(x_1+x_2)+1+k^2$，

结合①可得$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}=\dfrac{2(k^4-1)}{2k^2+1}+\dfrac{4k^2-4k^4}{2k^2+1}+1+k^2=\dfrac{7k^2-1}{2k^2+1}=\dfrac{7}{2}-\dfrac{\frac{9}{2}}{2k^2+1}$，

由 $k^2\geq 0$ 可得$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}\in\left[-1,\dfrac{7}{2}\right)$

综上可知，$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}$的取值范围是$\left[-1,\dfrac{7}{2}\right]$.

此题难点突破：分式函数“$\dfrac{7k^2-1}{2k^2+1}$”求最值方法

（一）换元法

方法一：设 $t=2k^2+1(t\geq 0)$，

则有 $\dfrac{7k^2-1}{2k^2+1}=\dfrac{7}{2}-\dfrac{\frac{9}{2}}{t}=\dfrac{7}{2}-\dfrac{\frac{9}{2}}{2k^2+1}$，

由 $k^2\geq 0$ 可得 $\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}\in[-1,\dfrac{7}{2})$.

方法二：设 $T=\dfrac{7k^2-1}{2k^2+1}$，解得：$k^2=-\dfrac{T+1}{2T-7}$，

由 $k^2\geq 0$ 可得：$T\in[-1,\dfrac{7}{2}]$. .

（二）函数法

方法三：求导解决

设 $f(x)=\dfrac{7x^2-1}{2x^2+1}(x\in\mathbf{R})$，

则 $f'(x)=\dfrac{18x}{(2x^2+1)^2}$

当 $x>0$ 时 $f(x)$在 $(0,+\infty)$ 单调递增，当 $x<0$ 时 $f(x)$在 $(-\infty,0)$ 单调递减，

故 $f(x)$的最小值是 $f(0)=-1$，

又由$f(x)=\dfrac{7}{2}-\dfrac{\frac{9}{2}}{2x^2+1}<\dfrac{7}{2}$,

故$-1\leq f(x)<\dfrac{7}{2}$

变式思考：如何求以下三组函数的最值（或范围）

（1）$\dfrac{7k^2}{2k^2+1}$；$\dfrac{7k^2-1}{2k^2}$；

（2）$\dfrac{7k}{2k^2+1}$；$\dfrac{7k^2+1}{2k}(k\neq 0)$；

（3）$\dfrac{7k^2-1}{2k}(k\neq 0)$；$\dfrac{7k^4}{2k^2+1}$.

小结提升 2：

解决圆锥曲线中的最值、取值范围问题构建代数关系式时可考虑的方面：

(1)利用圆锥曲线的几何性质或判别式构造不等关系，从而确定参数的取值范围；

(2)利用已知参数的范围，求新参数的范围，解这类问题的核心是建立两个参数之间的等量关系；

(3)利用隐含的不等关系建立不等式，从而求出参数的取值范围；

(4)利用已知的不等关系构造不等式，从而求出参数的取值范围；

(5)利用求函数的值域的方法将待求量表示为其他变量的函数，求其值域，从而确定参数的取值范围.

本专题学法指导：

1.要重视审题，这样才能充分挖掘题目信息，找到恰当的突破口；

2.多积累几何条件的转化角度及各种函数求最值的方法；

3.在多变量运算时，不要盲目计算，要先想、再算.

课后作业：（见文件 3）

拓展提升任务：（见文件 4）