



朝阳区线上课堂·高三年级数学

解析几何中的定值问题

北京市朝阳区八十中学 姚强



定值问题一般是在求解解析几何问题的过程中，探究某些几何量（斜率、距离、面积、比值等）与变量（斜率、点的坐标等）无关的问题，即在动点的“变”中寻找定值的“不变性”。

学习目标与任务

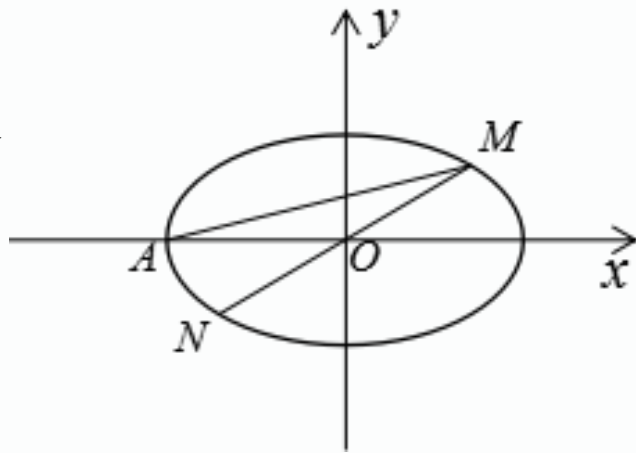
- 学习目标：认识解析几何中的“定值问题”，提升消参，计算，转化等数学能力，促进逻辑推理、数学运算、直观想象等数学核心素养的提升
- 学习任务
重点：认真听例题1讲解，体会几种解题方法的优缺点
难点：总结提炼定值问题的解题思想，完成课后作业

例题 1 如图, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左顶点为 A , MN 为过椭圆中心的动弦, 设直线

AM , AN 的斜率分别为 k_1 , k_2 , 求证: $k_1 \cdot k_2$ 为定值

几个变量: $k_1, k_2, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), k_{MN}$

目标式: $k_1 \cdot k_2$ 是定值



例题 1 如图, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左顶点为 A , MN 为过椭圆中心的动弦, 设直线

AM , AN 的斜率分别为 k_1 , k_2 , 求证: $k_1 \cdot k_2$ 为定值

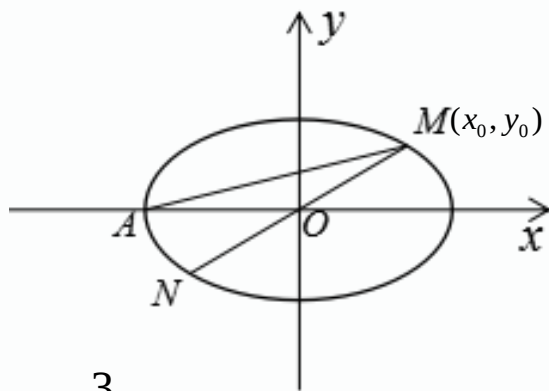
方法 1: 设 $M(x_0, y_0)$

以 x_0, y_0 为核心变量

则 $N(-x_0, -y_0)$, 所以 $k_1 = \frac{y_0}{x_0 + 2}$, $k_2 = \frac{-y_0}{-x_0 + 2}$

故 $k_1 \cdot k_2 = \frac{y_0}{x_0 + 2} \cdot \frac{-y_0}{-x_0 + 2} = \frac{-y_0^2}{4 - x_0^2} (*)$.

由 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1$ 得 $y_0^2 = \frac{3}{4}(4 - x_0^2)$ 代入 $(*)$ 得 $k_1 \cdot k_2 = -\frac{3}{4}$



例题 1 如图, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左顶点为 A , MN 为过椭圆中心的动弦, 设直线

AM , AN 的斜率分别为 k_1 , k_2 , 求证: $k_1 \cdot k_2$ 为定值

以 k_{MN} 为核心变量

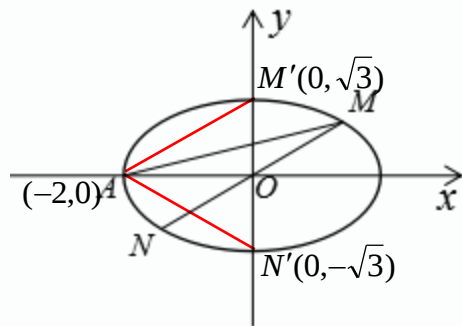
方法 2: 当 MN 斜率不存在时 $k_1 \cdot k_2 = \frac{\sqrt{3}}{0+2} \cdot \frac{-\sqrt{3}}{0+2} = -\frac{3}{4}$ (目标)

当 MN 斜率存在时, 设 $MN: y = kx, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$

由 $\begin{cases} y = kx \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases}$ 消去 y 得 $(3+4k^2)x^2 = 12$

解得 $x_1 = 2\sqrt{\frac{3}{3+4k^2}}, x_2 = -2\sqrt{\frac{3}{3+4k^2}}$

$$\text{故 } k_1 \cdot k_2 = \frac{y_1}{x_1+2} \cdot \frac{y_2}{x_2+2} = \frac{kx_1}{x_1+2} \cdot \frac{kx_2}{x_2+2} = \frac{k^2 \cdot 2\sqrt{\frac{3}{3+4k^2}} \cdot (-2\sqrt{\frac{3}{3+4k^2}})}{(2+2\sqrt{\frac{3}{3+4k^2}})(2-2\sqrt{\frac{3}{3+4k^2}})} = \frac{\frac{-12k^2}{3+4k^2}}{4(1-\frac{3}{3+4k^2})} = \frac{-12k^2}{16k^2} = -\frac{3}{4}$$



例题 1 如图, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左顶点为 A , MN 为过椭圆中心的动弦, 设直线

AM , AN 的斜率分别为 k_1 , k_2 , 求证: $k_1 \cdot k_2$ 为定值

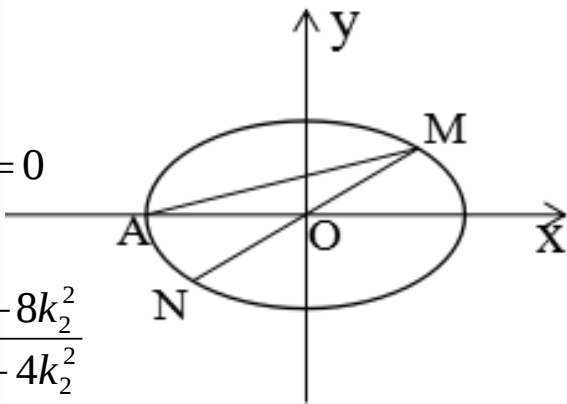
以 k_1, k_2 为核心变量

方法 3: 设 $AM: y = k_1(x+2)$, 由

$$\begin{cases} y = k_1(x+2) \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得 } (3+4k_1^2)x^2 + 16k_1^2x + 16k_1^2 - 12 = 0$$

$$\text{所以 } -2 \cdot x_M = \frac{16k_1^2 - 12}{3 + 4k_1^2} \text{ 即 } x_M = \frac{6 - 8k_1^2}{3 + 4k_1^2}。 \text{ 同理, } x_N = \frac{6 - 8k_2^2}{3 + 4k_2^2}$$

$$\text{由 } x_M = -x_N \text{ 得 } \frac{6 - 8k_1^2}{3 + 4k_1^2} = -\frac{6 - 8k_2^2}{3 + 4k_2^2}, \text{ 整理得 } k_1 \cdot k_2 = -\frac{3}{4}$$



总结：三种方法相比较

方法 1：解法过程是 “ $k_1 \cdot k_2 = f(x_0, y_0) \rightarrow$ 消元 $\rightarrow$ 定值”，只有两个变量，且形式简洁、运算简单。

方法 2：过程是 $k_1 \cdot k_2 = f(x_1, y_1, x_2, y_2) = h(k, x_1, x_2) \xrightarrow{x_1=g_1(k), x_2=g_2(k)} k_1 \cdot k_2 = F(k) \rightarrow$ 定值，变量的个数由四个到三个再到一个，还要解方程组，运算量较大。

方法 3：过程是 “ $x_M = f(k_1), x_N = g(k_2) \xrightarrow{x_M = -x_N} f(k_1) = -g(k_2) \rightarrow$ 定值”，虽然只有两个变量，但是化简过程中运算量较大。

综上所述，解决本题方法 1 最好。因此解决定值问题时，选择哪个核心变量表达，采用什么方法计算，对于提高解题效率至关重要。



还有什么方法

例题 2 已知椭圆 E 的中心在原点，焦点在 x 轴上，椭圆上的点到焦点的距离的最小值为 $\sqrt{2}-1$ ，离心率为 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(I) 求椭圆 E 的方程；

(II) 过点 $(1,0)$ 作直线 l 交 E 于 P, Q 两点，试问：在 x 轴上是否存在一个定点 M , $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}$ 为定值？若存在，求出这个定点 M 的坐标；若不存在，请说明理由 .

解：(I) 设椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，由已知得：

$$\begin{cases} a-c = \sqrt{2}-1 \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \therefore \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ c = 1 \end{cases} \therefore b^2 = a^2 - c^2 = 1 \text{ 椭圆 } E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

例题2 已知椭圆 E 的中心在原点，焦点在 x 轴上，椭圆上的点到焦点的距离的最小值为 $\sqrt{2}-1$ ，离心率为 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

(I) 求椭圆 E 的方程；

(II) 过点 $(1,0)$ 作直线 l 交 E 于 P, Q 两点，试问：在 x 轴上是否存在一个定点 M ， $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}$ 为定值？若存在，求出这个定点 M 的坐标；若不存在，请说明理由。

(II) 假设存在符合条件的点 $M(m,0)$ ，又设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ，则：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP} &= (x_1 - m, y_1), \overrightarrow{MQ} = (x_2 - m, y_2), \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = (x_1 - m) \cdot (x_2 - m) + y_1 y_2 \\ &= x_1 x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2 + y_1 y_2\end{aligned}$$

$$\text{目标式 } \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = x_1 x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2 + y_1 y_2$$


$$\text{目标式} \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = x_1 x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2 + y_1 y_2$$

法一：以 l 的斜率 k 为核心变量

①当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为： $y = k(x-1)$

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ y = k(x-1) \end{cases} \text{得 } x^2 + 2k^2(x-1)^2 - 2 = 0$$

$$(2k^2 + 1)x^2 - 4k^2x + (2k^2 - 2) = 0 \text{ 由韦达定理得: } x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{2k^2 + 1}, x_1 x_2 = \frac{2k^2 - 2}{2k^2 + 1}$$

$$y_1 y_2 = k^2(x_1 - 1)(x_2 - 1) = k^2[x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1] = -\frac{k^2}{2k^2 + 1} \text{ 所以}$$

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = \frac{2k^2 - 2}{2k^2 + 1} - m \cdot \frac{4k^2}{2k^2 + 1} + m^2 - \frac{k^2}{2k^2 + 1} = \frac{(2m^2 - 4m + 1)k^2 + (m^2 - 2)}{2k^2 + 1}$$

对于任意的 k 值， $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}$ 为定值

$$\frac{2m^2 - 4m + 1}{2} = \frac{m^2 - 2}{1} \text{ 即 } 2m^2 - 4m + 1 = 2(m^2 - 2), \text{ 得 } m = \frac{5}{4},$$

$$\text{所以 } M(\frac{5}{4}, 0), \text{ 使得 } \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = -\frac{7}{16}$$

还需要注意什么问题？

验证特殊情况 k 不存在时


$$\text{目标式 } \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = x_1 x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2 + y_1 y_2$$

法二：以 t 为核心变量

还用考虑斜率不存在吗？

①当直线 l 的斜率不为 0 时，设直线 l 的方程为 $x = ty + 1$

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ x = ty + 1 \end{cases} \text{ 得 } (t^2 + 2)y^2 + 2ty - 1 = 0 \therefore y_1 + y_2 = \frac{-2t}{t^2 + 2}, y_1 y_2 = \frac{-1}{t^2 + 2}$$

$$x_1 x_2 = (ty_1 + 1) \cdot (ty_2 + 1) = t^2 y_1 y_2 + t(y_1 + y_2) + 1 = \frac{-2t^2 + 2}{t^2 + 2}$$

$$x_1 + x_2 = t(y_1 + y_2) + 2 = \frac{4}{t^2 + 2}$$

$$\therefore \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = \frac{-2t^2 + 2}{t^2 + 2} - \frac{4m}{t^2 + 2} + m^2 - \frac{1}{t^2 + 2} = \frac{(m^2 - 2)t^2 + 2m^2 - 4m + 1}{t^2 + 2}$$

同法一，可得 $M(\frac{5}{4}, 0)$ ，使得 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = -\frac{7}{16}$

需要验证特殊情况 l 的斜率为 0 时

【小结提升】定值问题处理技巧：

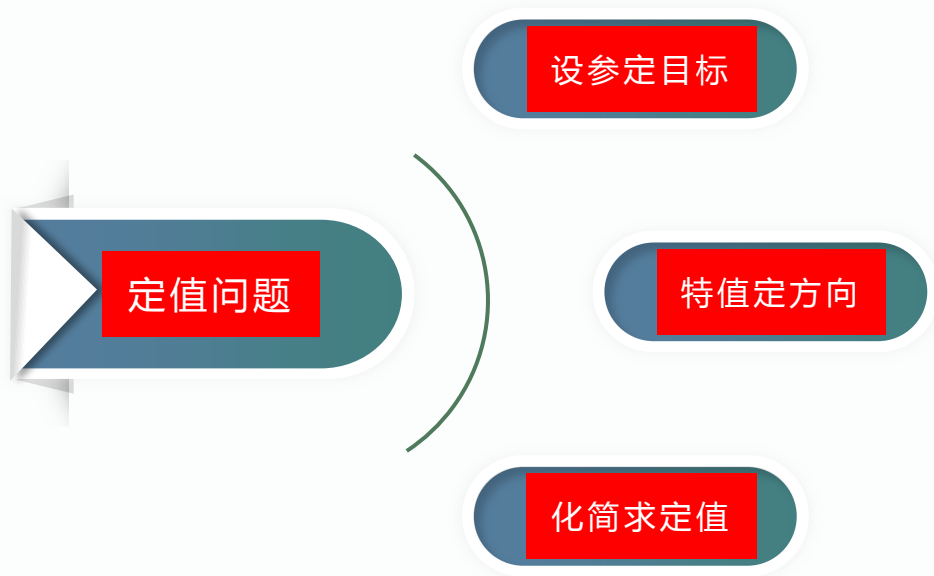
1. 先考虑特殊位置, 比如通过 $k=0$ 或 k 不存在等情况求出一个值作为目标和方向.
2. 再考虑一般情况(即证明目标值在一般情况下成立), 用核心变量来表示其它变量, 尽量减少参量.
3. 巧妙利用解析关系和方程关系进行运算转化, 比如韦达定理, 弦长公式, 点在曲线上等, 不急于把点代入, 而是化简后整体代入.



【学法指导】

- 定值问题处理方法：
- 确定核心变量, 其它变量尽量用它来表示
- 确定用来证明是定值的目标式
- 把目标式的几何特征转化为解析特征, 用核心变量表达目标式进行化简, 最后消去参数求出定值

【学法指导】





感谢您的观看

北京市朝阳区教育研究中心 制作