拓展作业

已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，点 A（1，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$）在椭圆 C 上.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程;

(Ⅱ)设动直线 l 与椭圆 C 有且仅有一个公共点，判断是否存在以原点 O 为圆心的圆，满足此圆与 l 相交于两点 P_1，P_2（两点均不在坐标轴上），且使得直线 OP_1，OP_2 的斜率之积为定值？若存在，求此圆的方程；若不存在，说明理由.

（Ⅰ）解：由题意，得 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$a^2=b^2+c^2$，又因为点 $A(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ 在椭圆 C 上，

所以 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1$，解得 $a=2$，$b=1$，$c=\sqrt{3}$，

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

（Ⅱ）**结论**：存在符合条件的圆，且此圆的方程为 $x^2+y^2=5$.

证明如下：

假设存在符合条件的圆，并设此圆的方程为 $x^2+y^2=r^2(r>0)$.

当直线 l 的斜率存在时，设 l 的方程为 $y=kx+m$.

由方程组 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

因为直线 l 与椭圆 C 有且仅有一个公共点，

所以 $\Delta_1=(8km)^2-4(4k^2+1)(4m^2-4)=0$，即 $m^2=4k^2+1$.

由方程组 $\begin{cases} y=kx+m, \\ x^2+y^2=r^2, \end{cases}$ 得 $(k^2+1)x^2+2kmx+m^2-r^2=0$，

则 $\Delta_2=(2km)^2-4(k^2+1)(m^2-r^2)>0$.

设 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{-2km}{k^2+1}$，$y=-2x+b$，

设直线 OP_1，OP_2 的斜率分别为 k_1，k_2，

所以 $k_1k_2=\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=\dfrac{(kx_1+m)(kx_2+m)}{x_1x_2}=\dfrac{k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2}{x_1x_2}$

$$=\frac{k^2\cdot\frac{m^2-r^2}{k^2+1}+km\cdot\frac{-2km}{k^2+1}+m^2}{\frac{m^2-r^2}{k^2+1}}=\frac{m^2-r^2k^2}{m^2-r^2},$$

将 $m^2=4k^2+1$ 代入上式，得 $k_1\cdot k_2=\frac{(4-r^2)k^2+1}{4k^2+(1-r^2)}$.

要使得 k_1k_2 为定值，则 $\frac{4-r^2}{4}=\frac{1}{1-r^2}$，即 $r^2=5$，验证符合题意.

所以当圆的方程为 $x^2+y^2=5$ 时，圆与 l 的交点 P_1,P_2 满足 k_1k_2 为定值 $-\frac{1}{4}$.

当直线 l 的斜率不存在时，由题意知 l 的方程为 $x=\pm2$，

此时，圆 $x^2+y^2=5$ 与 l 的交点 P_1,P_2 也满足 $k_1k_2=-\frac{1}{4}$.