课题：解析几何中的定值问题

【学习目标】认识解析几何中的“定值问题”，提升消参，计算，转化等数学能力，促进逻辑推理、数学运算、直观想象等数学核心素养的提升

【学习任务】

重点：1. 认真听例题 1 讲解，体会几种解题方法的优缺点。

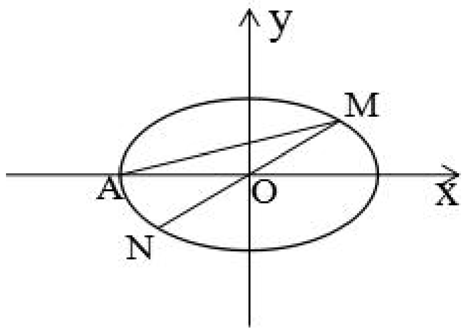
难点：2. 总结提炼定值问题的解题思想，完成课后作业

【预备知识】圆锥曲线（椭圆，双曲线，抛物线，圆）与直线的方程与性质，二次方程

【典型例题】

定值问题一般是在求解解析几何问题的过程中，探究某些几何量（斜率、距离、面积、比值等）与变量（斜率、点的坐标等）无关的问题，即在动点的“变”中寻找定值的“不变性”

例题 1 如图，已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左顶点为 A，MN 为过椭圆中心的动弦，设直线 AM，AN 的斜率分别为 k_1，k_2，求证：$k_1\cdot k_2$ 为定值



方法 1：设 $M(x_0,y_0)$，则 $N(-x_0,-y_0)$，所以

$$k_1=\frac{y_0}{x_0+2},\ k_2=\frac{-y_0}{-x_0+2}$$

故 $k_1\cdot k_2=\dfrac{y_0}{x_0+2}\cdot\dfrac{-y_0}{-x_0+2}=\dfrac{-y_0^2}{4-x_0^2}$ (*). 由

$\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$ 得 $y_0^2=\dfrac{3}{4}\left(4-x_0^2\right)$

代入(*)得 $k_1\cdot k_2=-\dfrac{3}{4}$

方法 2：当 MN 斜率不存在时，$k_1\cdot k_2=\dfrac{\sqrt{3}}{0+2}\cdot\dfrac{-\sqrt{3}}{0+2}=-\dfrac{3}{4}$（目标）

当 MN 斜率存在时，设 MN: $y=kx,M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$

由 $\begin{cases}y=kx\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$ 消去 y 得 $\left(3+4k^2\right)x^2=12$，所以 $x=\pm2\sqrt{\dfrac{3}{3+4k^2}}$

解得 $x_1=2\sqrt{\dfrac{3}{3+4k^2}},x_2=-2\sqrt{\dfrac{3}{3+4k^2}}$

故 $k_1\cdot k_2=\dfrac{y_1}{x_1+2}\cdot\dfrac{y_2}{x_2+2}=\dfrac{kx_1}{x_1+2}\cdot\dfrac{kx_2}{x_2+2}$，代入 x_1,x_2 得

$$k_1\cdot k_2=\frac{k^2\cdot 2\sqrt{\frac{3}{3+4k^2}}\cdot(-2\sqrt{\frac{3}{3+4k^2}})}{(2+2\sqrt{\frac{3}{3+4k^2}})(2-2\sqrt{\frac{3}{3+4k^2}})}=\frac{\frac{-12k^2}{3+4k^2}}{4(1-\frac{3}{3+4k^2})}=\frac{-12k^2}{16k^2}=-\frac{3}{4}$$

方法 3：设 AM: $y=k_1(x+2)$，由

$\begin{cases} y=k_1(x+2) \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases}$ 消去 y 得 $(3+4k_1^2)x^2+16k_1^2x+16k_1^2-12=0$

所以 $-2\cdot x_M=\frac{16k_1^2-12}{3+4k_1^2}$ 即 $x_M=\frac{6-8k_1^2}{3+4k_1^2}$。同理，$x_N=\frac{6-8k_2^2}{3+4k_2^2}$

由 $x_M=-x_N$ 得 $\frac{6-8k_1^2}{3+4k_1^2}=-\frac{6-8k_2^2}{3+4k_2^2}$，整理得 $k_1\cdot k_2=-\frac{3}{4}$

总结：三种方法相比较

方法 1：解法过程是“$k_1\cdot k_2=f(x_0,y_0)\to$消元$\to$定值”，只有两个变量，且形式简洁、运算简单。

方法 2：过程是 $k_1\cdot k_2=f(x_1,y_1,x_2,y_2)=h(k,x_1,x_2)\xrightarrow{x_1=g_1(k),x_2=g_2(k)}k_1\cdot k_2=F(k)$ $\to$定值，变量的个数由四个到三个再到一个，还要解方程组，运算量较大。

方法 3：过程是“$x_M=f(k_1),x_N=g(k_2)\xrightarrow{x_M=-x_N}f(k_1)=-g(k_2)\to$定值”，虽然只有两个变量，但是化简过程中运算量较大。

综上可以看出，解决本题方法 1 最好。因此解决定值问题时，选择哪个核心变量表达，采用什么方法计算，对于提高解题效率至关重要。

当然，我们也可以考虑设点 M（2cosθ，$\sqrt{3}$ sinθ）这样就只有一个参变量了。

例题 2 已知椭圆 E 的中心在原点，焦点在 x 轴上，椭圆上的点到焦点的距离的最小值为 $\sqrt{2}-1$，离心率为 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）过点 $(1,0)$ 作直线 l 交 E 于 P,Q 两点，试问：在 x 轴上是否存在一个定点 M，$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ 为定值？若存在，求出这个定点 M 的坐标；若不存在，请说明理由 .

解：(Ⅰ) 设椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 由已知得：

$\begin{cases} a-c=\sqrt{2}-1 \\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\therefore\begin{cases} a=\sqrt{2} \\ c=1 \end{cases}$ $\therefore b^2=a^2-c^2=1$ 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$

（Ⅱ）假设存在符合条件的点 $M(m,0)$，又设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则：

$\overrightarrow{MP}=(x_1-m,y_1),\overrightarrow{MQ}=(x_2-m,y_2),\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=(x_1-m)\cdot(x_2-m)+y_1y_2$

$=x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2+y_1y_2$

法一：以 l 的斜率 k 为核心变量

①当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为： $y=k(x-1)$，则

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=k(x-1)\end{cases}$ 得 $x^2+2k^2(x-1)^2-2=0$

$(2k^2+1)x^2-4k^2x+(2k^2-2)=0$ 由韦达定理得：$x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{2k^2+1},x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{2k^2+1}$

$y_1y_2=k^2(x_1-1)(x_2-1)=k^2\left[x_1x_2-(x_1+x_2)+1\right]=-\dfrac{k^2}{2k^2+1}$ 所以

$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=\dfrac{2k^2-2}{2k^2+1}-m\cdot\dfrac{4k^2}{2k^2+1}+m^2-\dfrac{k^2}{2k^2+1}=\dfrac{(2m^2-4m+1)k^2+(m^2-2)}{2k^2+1}$

对于任意的 k 值，$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ 为定值，所以

$\dfrac{2m^2-4m+1}{2}=\dfrac{m^2-2}{1}$ 即 $2m^2-4m+1=2(m^2-2)$，得 $m=\dfrac{5}{4}$，

所以 $M(\dfrac{5}{4},0)$, 使得 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=-\dfrac{7}{16}$；

②当直线 l 的斜率不存在时，直线 $l:x=1,x_1+x_2=2,x_1x_2=1,y_1y_2=-\dfrac{1}{2}$

由 $m=\dfrac{5}{4}$ 得 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=-\dfrac{7}{16}$ 综上述①②知，符合条件的点 M 存在，其坐标为 $(\dfrac{5}{4},0)$ ．

法二：以 t 为核心变量

①当直线 l 的斜率不为 0 时，设直线 l 的方程为 $x=ty+1$，

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\\ x=ty+1\end{cases}$ 得 $(t^2+2)y^2+2ty-1=0$ $\therefore y_1+y_2=\dfrac{-2t}{t^2+2},y_1y_2=\dfrac{-1}{t^2+2}$

$x_1x_2=(ty_1+1)\cdot(ty_2+1)=t^2y_1y_2+t(y_1+y_2)+1=\dfrac{-2t^2+2}{t^2+2}$

$x_1+x_2=t(y_1+y_2)+2=\dfrac{4}{t^2+2}$

$\therefore\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=\dfrac{-2t^2+2}{t^2+2}-\dfrac{4m}{t^2+2}+m^2-\dfrac{1}{t^2+2}=\dfrac{(m^2-2)t^2+2m^2-4m+1}{t^2+2}$

同法一，可得 $M(\dfrac{5}{4},0)$, 使得 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=-\dfrac{7}{16}$

②当直线 l 的斜率为 0 时，直线 $l:y=0$，由 $M(\dfrac{5}{4},0)$ 得：

$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=(\sqrt{2}-\dfrac{5}{4})\cdot(-\sqrt{2}-\dfrac{5}{4})=\dfrac{25}{16}-2=-\dfrac{7}{16}$

综上述①②知，符合条件的点 M 存在，其坐标为 $(\dfrac{5}{4},0)$

【小结提升】定值问题处理技巧:

1.先考虑特殊位置,比如通过 k=0 或 k 不存在等情况求出一个值作为目标和方向.
2.再考虑一般情况(即证明目标值在一般情况下成立),用核心变量来表示其它变量,尽量减少参量.

3.巧妙利用解析关系和方程关系进行运算转化,比如韦达定理,弦长公式,点在曲线上等,不急于把点代入,而是化简后整体代入.

【学法指导】

定值问题处理方法:

1.确定核心变量,其它变量尽量用它来表示

2.确定用来证明是定值的目标式

3.把目标式的几何特征转化为解析特征,用核心变量表达目标式进行化简,看结果是否与参数有关