



朝阳区线上课堂·高三年级数学

解析几何中的定点问题

北京市朝阳区八十中学

潘荣杰

定点问题一般在运动变化过程中，动直线可能恒过某一个固定不变的点，即在动直线位置的“变”中寻找均过定点的这一“不变性”。定点问题很好体现了几何问题的本质。

【学习目标】

- 1.学会解决动直线过定点问题的两种策略,体会两种策略的共同数学本质,即用一个参数表达出动直线的方程.
- 2.对于通法不好应用的问题,尝试运用“先猜后验,转化为定值问题”的解决策略.
- 3.通过对定点问题的研究与解决,感悟解析几何中的方程思想.

【预备知识】

1. 直线方程的五种表达形式，特别是点斜式方程.
2. 直线与圆锥曲线的位置关系的代数表达.
3. 几何条件的代数转化，即坐标法的应用.
4. $x \in R, ax + b = 0$ 恒成立，则 $a = b = 0$;

$x \in R, ax^2 + bx + c = 0$ 恒成立，则 $a = b = c = 0$.

【典型例题】

例 1、 (2017 高考全国卷 II) 设 O 为坐标原点，动点 M

在椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 上，过 M 作 x 轴的垂线，垂足为 N ，

点 P 满足 $\overrightarrow{NP} = \sqrt{2}\overrightarrow{NM}$ 。

(I) 求点 P 的轨迹方程；

(II) 设点 Q 在直线 $x = -3$ 上，且 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 1$ 。证明：过点 P

且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F 。

1.条件或结论如何转化:

设 $P(x, y)$, $M(x_0, y_0)$, $N(x_0, 0)$, $\overrightarrow{NP} = (x - x_0, y)$, $\overrightarrow{NM} = (0, y_0)$

条件 $\overrightarrow{NP} = \sqrt{2}\overrightarrow{NM}$ 可以进行坐标转化为
$$\begin{cases} x_0 = x \\ y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases};$$

设 $Q(-3, t)$, $P(m, n)$, 则 $\overrightarrow{OP} = (m, n)$, $\overrightarrow{PQ} = (-3 - m, t - n)$,

条件 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 1$ 可以进行坐标转化为 $-3m - m^2 + tn - n^2 = 1$.

结论 (过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F)

转化方法 1:

写出直线的 l 方程, 检验 $F(-1,0)$ 是否满足方程. l 过 $P(m,n)$,

只需求其斜率, 又 l 与 OQ 垂直, 故只需求 OQ 的斜率, 即求

Q 的坐标. 由 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 1$, Q 的坐标即可用 m, n 表示出来.

结论 (过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F)

转化方法 2: 直接去证明 $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{PF} = 0$ 即可.

2.多种解法

解：（I）设 $P(x, y)$ ， $M(x_0, y_0)$ ， $N(x_0, 0)$ ，

$$\overrightarrow{NP} = (x - x_0, y), \quad \overrightarrow{NM} = (0, y_0)$$

由 $\overrightarrow{NP} = \sqrt{2} \overrightarrow{NM}$ 可得
$$\begin{cases} x_0 = x \\ y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} y \end{cases};$$

代入法求轨迹

因为 $M(x_0, y_0)$ 在 C 上，所以 $\frac{x_0^2}{2} + y_0^2 = 1$.

即 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 1$ ，所以点 P 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 = 2$.

(2) 由题意知 $F(-1,0)$. 设 $Q(-3,t), P(m,n)$, 则

$$\overrightarrow{OP} = (m, n), \overrightarrow{PQ} = (-3-m, t-n)$$

$$\text{由 } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 1 \text{ 得 } -3m - m^2 + tn - n^2 = 1,$$

$$\text{又由 (1) 知 } m^2 + n^2 = 2,$$

$$\text{故 } 3 + 3m - tn = 0 \quad t = \frac{3 + 3m}{n}$$

$$\text{OQ 的斜率为 } -\frac{m+1}{n}$$

$$\text{若 } m \neq -1, \text{ } l \text{ 的斜率为 } \frac{n}{m+1}, \text{ 方程为 } y - n = \frac{n}{m+1}(x - m)$$

$F(-1,0)$ 显然满足 l 的方程

若 $m = -1$, $P(-1, \pm 1)$, $l: x = -1$, 也过 $F(-1,0)$

综上: 过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F .

(2) 由题意知 $F(-1, 0)$ 。设 $Q(-3, t), P(m, n)$, 则

$$\overrightarrow{OQ} = (-3, t), \overrightarrow{PF} = (-1 - m, -n), \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{PF} = 3 + 3m - tn,$$

$$\overrightarrow{OP} = (m, n), \overrightarrow{PQ} = (-3 - m, t - n)$$

$$\text{由 } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 1 \text{ 得 } -3m - m^2 + tn - n^2 = 1,$$

$$\text{又由 (1) 知 } m^2 + n^2 = 2,$$

$$\text{故 } 3 + 3m - tn = 0. \text{ 所以 } \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{PF} = 0, \text{ 即 } \overrightarrow{OQ} \perp \overrightarrow{PF}.$$

又过点 P 存在唯一直线垂直于 OQ ,

所以过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F .

3.每种方法的运算难点及突破方法.

要敢于引入参数，还要注意点在曲线上，
点满足曲线的方程，常常以此来进行化简

$P(m, n)$ 在圆 $x^2 + y^2 = 2$ 上，则 $m^2 + n^2 = 2$.

【小结提升】

本题所过定点已给，所以我们的策略可以验证，
也可以直接证明.

例 2. 【2017 课标 I 理 20】

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$),

四点 $P_1(1,1)$, $P_2(0,1)$, $P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 中恰有三点在椭圆 C 上.

(I) 求 C 的方程;

(II) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A, B 两点. 若

直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1 , 证明: l 过定点.

1.条件或结论如何转化:

(I) 考查对椭圆的对称性的理解

$P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 两点关于 y 轴对称, 由椭圆的对称性

可知 C 经过 P_3 , P_4 两点.

另外由 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} > \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2}$ 知, C 不经过点 P_1 , 所以点 P_2 在 C 上.

因此 P_2, P_3, P_4 在椭圆上, 代入其标准方程, 即可求出 C 的方程;

(II) 简单点说就是设出 l 的方程 $y = kx + m$, 然后去寻找 k 和 m 的关系.

先设直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率分别为 k_1, k_2 , 再设直线 l 的方程,

当 l 与 x 轴垂直时, 通过计算, 不满足题意,

再设 $l: y = kx + m$ ($m \neq 1$), 将 $y = kx + m$ 代入 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$,

写出判别式, 利用根与系数的关系表示出 $x_1 + x_2$, x_1x_2 ,

进而表示出 $k_1 + k_2$, 根据 $k_1 + k_2 = -1$ 列出等式表示出 k 和 m 的关系,

从而判断出直线恒过定点.

解析：（1）由于 P_3 ， P_4 两点关于 y 轴对称，

故由题设知 C 经过 P_3 ， P_4 两点.

又由 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} > \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2}$ 知， C 不经过点 P_1 ，所以点 P_2 在 C 上.

$$\text{因此} \begin{cases} \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases}.$$

故 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(II) 设直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率分别为 k_1, k_2 ,

如果 l 与 x 轴垂直, 设 $l: x=t$, 由题设知 $t \neq 0$, 且 $|t| < 2$,

可得 A, B 的坐标分别为 $(t, \frac{\sqrt{4-t^2}}{2})$, $(t, -\frac{\sqrt{4-t^2}}{2})$.

则 $k_1 + k_2 = \frac{\sqrt{4-t^2} - 2}{2t} - \frac{\sqrt{4-t^2} + 2}{2t} = -1$, 得 $t = 2$, 不符合题设.

从而可设 $l: y = kx + m$ ($m \neq 1$). 将 $y = kx + m$ 代入 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 得

$$(4k^2 + 1)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0.$$

由题设可知 $\Delta = 16(4k^2 - m^2 + 1) > 0$.

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = -\frac{8km}{4k^2 + 1}$, $x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 4}{4k^2 + 1}$.

$$\begin{aligned} \text{而 } k_1 + k_2 &= \frac{y_1 - 1}{x_1} + \frac{y_2 - 1}{x_2} \\ &= \frac{kx_1 + m - 1}{x_1} + \frac{kx_2 + m - 1}{x_2} \\ &= \frac{2kx_1 x_2 + (m - 1)(x_1 + x_2)}{x_1 x_2}. \end{aligned}$$

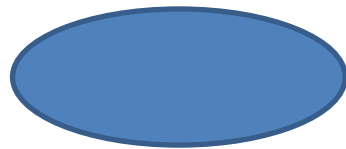
由题设 $k_1 + k_2 = -1$ ，故 $(2k+1)x_1x_2 + (m-1)(x_1 + x_2) = 0$ 。

$$\text{即 } (2k+1) \cdot \frac{4m^2-4}{4k^2+1} + (m-1) \cdot \frac{-8km}{4k^2+1} = 0.$$

$$\text{解得 } k = -\frac{m+1}{2}.$$

当且仅当 $m > -1$ 时， $\Delta > 0$ ，于是 $l: y = -\frac{m+1}{2}x + m$ ，

即 $y+1 = -\frac{m+1}{2}(x-2)$ ，所以 l 过定点 $(2, -1)$ 。



解法二：

设直线 P_2A ： $y = kx + 1$ ，与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 联立，

可求出 A 点坐标（用 k 表示），再由 $k_{P_2A} + k_{P_2B} = -1$ ，

将 A 点坐标中的 k 换成 $-1 - k$ ，可得 B 点坐标（用 k 表示），这样直线 AB 方程就可以用 k 表示出来，就可以知道直线 AB 是否过定点了（具体解答略）。

这是一种很好的思路，但对于此题来说，运算量很大！

同学们可以试一试，所以我们要考虑运算的复杂度问题。

3.方法的运算难点及突破方法

(1) 严谨性

一定要考虑 l 与 x 轴是否垂直，一般需要分类讨论.

(2) 用一个参数写出直线的方程

可以直接引入一个参数，所有的点、线都用此参数表示，
动直线也就可以用此参数表出来，或者引入动直线的方程 $y = kx + m$ ，（要考虑斜率存在与否）然后去寻找 k 与 m 的关系.

(3) 对于通法不好解决的问题，能灵活运用“先猜后验，转化为定值问题”的这种特法.

【小结提升】

若过定点已给，所以我们的策略可以验证，也可以直接证明.

若定点未知，可以直接引入一个参数，所以的点、线都用此参数

表示，这样动直线也就用一个参数出来，或者引入动直线的方程

$y = kx + m$ ，然后去寻找 k 与 m 的等式关系.当然也可以采取“先猜

后证转化为定值问题”这种策略.

【本专题学法指导】

1、根据不同情境，合理选择方法

解决动直线过定点问题的策略很多，比如可以利用平面几何知识求解，可以利用斜率相等或向量共线有关知识求解，也可以先猜后验证的方式求解，当然更重要的是方程思想求解。

2、通过对定点问题的研究与解决，我们还是要感悟解析几何中的方程思想，体会如何引入参数方便，如何消去参数简洁，如何优化代数运算得到我们想要的几何结论。



感谢您的观看

北京市朝阳区教育研究中心 制作