**解析几何中的定点问题**

**【学习目标】**

1.学会解决动直线过定点问题的两种策略，体会两种策略的共同数学本质——用一个参数表达出动直线的方程**.**

2.对于通法不好解决的问题，能灵活运用“先猜后验，转化为定值问题”的这种策略.

3.通过对定点问题的研究与解决，感悟解析几何中的方程思想.

**【预备知识】**

1.直线方程的五种表达形式，特别是点斜式方程.

2.直线与圆锥曲线的位置关系的代数表达.

3.几何条件的代数转化，即坐标法的应用.

4.****恒成立，则****；****恒成立，则****.

**【典型例题】**

**例**1. (2017·高考全国卷Ⅱ)设****为坐标原点，动点****在椭圆****上，过*M*作****轴的垂线，垂足为****，点****满足**.**

(Ⅰ)求点的轨迹方程；

(Ⅱ)设点在直线上，且**.**证明：过点****且垂直于****的直线****过****的左焦点**.**

**1.条件或结论如何转化**

设，，，****，****

条件 可以进行坐标转化为**.**

设,则，条件可以进行坐标转化为**.**

结论（过点且垂直于的直线过的左焦点）转化方法1

写出直线的方程，检验是否满足方程.过，只需求其斜率，又与*OQ*垂直，故只需求*OQ*的斜率，即求*Q*的坐标.由，*Q*的坐标即可用表示出来**.**

结论（过点且垂直于的直线过的左焦点）转化方法2

直接去证明即可.

**2.多种解法**

解：(Ⅰ)设，，，****，****

由**** 可得**；**

因为在上，所以**.**

即****，所以点的轨迹方程为**.**

 （Ⅱ）解法1：由题意知**.**设，则

**.**

由得，

又由（Ⅰ）知，

故 ，，的斜率为**.**

若，的斜率为，方程为**.**

显然满足的方程**.**

若，，：，也过**.**

综上：过点且垂直于的直线过*C*的左焦点**.**

（Ⅱ）解法2：由题意知**.**设，则

，

**.**

由得，又由（1）知，

故**.**

所以，即**.**又过点存在唯一直线垂直于，所以过点且垂直于的直线过的左焦点**.**

3.每种方法的运算难点及突破方法**.**

要敢于引入参数，还要注意点在曲线上，点满足曲线的方程，常常以此来进行化简**.**

在圆上，则**.**

【小结提升】

本题所过定点已给，所以我们的策略可以验证，也可以直接证明**.**

**例**2.【2017课标Ⅰ理20】已知椭圆：，四点，，，中恰有三点在椭圆上**.**

（Ⅰ）求的方程；

（Ⅱ）设直线不经过点且与相交于两点.若直线与直线的斜率的和为，证明：过定点**.**

**1.条件或结论如何转化：**

（Ⅰ）考查对椭圆的对称性的理解

，两点关于轴对称，由椭圆的对称性可知经过，两点**.**

另外由知，不经过点，所以点在上**.**因此，

在椭圆上**.**代入其标准方程，即可求出的方程**.**

（Ⅱ）简单点说就是设出*l*的方程，然后去寻找和的关系**.**

先设直线与直线的斜率分别为，再设直线的方程，

当与轴垂直时，通过计算，不满足题意，

再设：（），将代入，

写出判别式，利用根与系数的关系表示出，，

进而表示出，根据列出等式表示出和的关系，

从而判断出直线恒过定点**.**

**2.多种解法**

解：（Ⅰ）由于，两点关于轴对称，

故由题设知经过，两点.

又由知，不经过点，所以点在上.

因此，解得.

故的方程为.

（Ⅱ）设直线与直线的斜率分别为，

如果与轴垂直，设：，由题设知，且，

可得的坐标分别为（，），（，）.

则，得，不符合题设.

从而可设：（）.将代入得

.

由题设可知.

设，，则， .

而



.

由题设，故.

即.

解得.

当且仅当时，，于是：，

即，所以过定点**.**

解法二 ：

设直线：，与椭圆联立，可求出点坐标（用表示）**.**再由，将点坐标中的换成，可得点坐标（用表示）**.**这样直线方程就可以用表示出来，就可以知道直线是否过定点了**（具体解答略）.**

这是一种很好的思路，但对于此题来说，运算量很大！同学们可以试一试，所以我们要考虑运算的复杂程度问题**.**

**3.方法的运算难点及突破方法**

（1）严谨性

一定要考虑与轴是否垂直，一般需要分类讨论**.**

（2）用一个参数写出直线的方程

可以直接引入一个参数，所有的点.线都用此参数表示，动直线也就可以用此参数表出来，或者引入动直线的方程，（要考虑斜率存在与否）然后去寻找与的关系.

（3）对于通法不好解决的问题，能灵活运用“先猜后验，转化为定值问题”的这种特法.

**【小结提升】**

若过定点已给，所以我们的策略可以验证，也可以直接证明**.**

若定点未知，可以直接引入一个参数，所以的点.线都用此参数表示，这样动直线也就用一个参数出来，或者引入动直线的方程，然后去寻找与的等式关系.当然也可以采取“先猜后证转化为定值问题”这种策略.

**【本专题学法指导】**

1.根据不同情境，合理选择方法

解决动直线过定点问题的策略很多，比如可以利用平面几何知识求解，可以利用斜率相等或向量共线有关知识求解，也可以先猜后验证的方式求解，当然更重要的是方程思想求解**.**

2.通过对定点问题的研究与解决，我们还是要感悟解析几何中的方程思想，体会如何引入参数方便，如何消去参数简洁，如何优化代数运算得到我们想要的几何结论.