

立体几何中的轨迹问题

【使用说明】

立体几何中的轨迹问题在北京高考中还是很重要的，我们有些同学可能更擅长坐标运算，对于空间想象还有点疑惑，所以我们有必要再练一练。本节课我们将琳琅满目的问题进行分解，逐一带领大家去突破这些难点问题。这个专题共设计了3个课时，第1课时将正方体中重要的位置关系进行梳理和应用；第2课时从方法层面架起数形之间一座桥（立体几何中的轨迹问题）；第3课时各类问题综合应用。三个课时中涉及到的部分题目，同学们在之前的复习中可能已经做过了，在这个时间点设计这样的专题，将这些问题重新再做，然后再进行横向、纵向之间的联系，目的是希望同学们通过这样一轮复习之后，对于这类问题能够比之前有更深入的认识和更强的处理能力。本节课是第2课时即为立体几何中的轨迹问题。

【学法指导】

大家对于这部分题目可能会有有一种难者不会，会者不难的感觉。希望通过我们这一专题的设计能够让大家都能够在原有基础上有所收获。原本会的同学们能够对问题认识的更加系统和深刻；原本不太会的同学们也可以有招去试着做做。同学们可以遵守一定之规尝试着去做做（积累一些重要的位置关系或者是数形之间架起一座桥的方法）。同学们可以通过教师的讲解、图形的展示、数学教学软件的帮助来理解和掌握本节课的教学内容。

【主要方法】

- 1、数形之间架起一座桥；
- 2、将立体问题转化为平面问题；
- 3、选择题、填空题特殊方法（特殊值法、特殊位置法、极限法、排除法等）。

【教学目标】

- 1、同学们通过以往的练习，争取能够熟练掌握正方体中的一些重要位置关系并能够进行应用；
- 2、同学们通过本节课的练习，争取能够掌握处理立体几何中的轨迹问题的两种方法（方法一：坐标运算；方法二：通过构造辅助线，直接研究空间位置关系）
- 3、同学们通过作业中一些比较综合的练习，争取能够掌握一些基本的处理立体几何问题的方法（将立体问题转化为平面问题；数形结合等）；
- 4、同学们通过这一个专题的努力探索，争取能够对于知识之间的横向、纵向联系有一定的把握。

【教学重点】

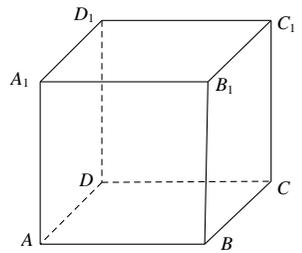
- 1、正方体中重要的位置关系及应用；
- 2、一些基本的转化方法。

【教学难点】

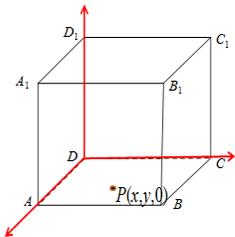
知识之间的牵引和综合应用能力的提升。

【题目训练】

1. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为底面 $ABCD$ 上一动点, 如果 P 到点 A_1 的距离等于 P 到直线 CC_1 的距离, 那么点 P 的轨迹所在的曲线是 ()
- (A) 直线 (B) 圆 (C) 抛物线 (D) 椭圆

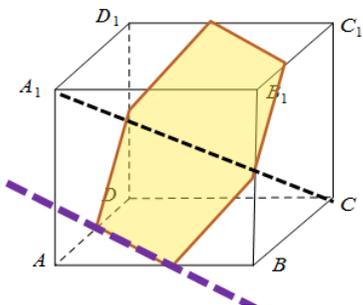


方法一: 坐标运算

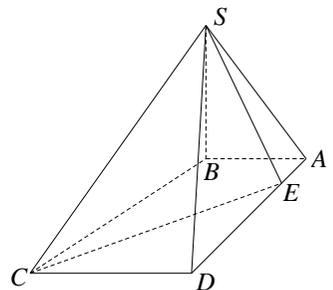


$$A_1P^2 = PC^2 = A_1A^2 + AP^2, (x-1)^2 + y^2 + 1 = x^2 + (y-1)^2 + 0^2, \text{即 } 2x - 2y - 1 = 0$$

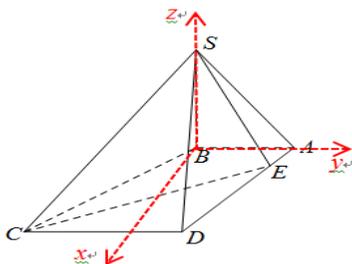
方法二: 作垂面



2. 如图, 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, $SB \perp$ 底面 $ABCD$. 底面 $ABCD$ 为梯形, $AB \perp AD$, $AB \parallel CD$, $AB=1, AD=3, CD=2$. 若点 E 是线段 AD 上的动点, 则满足 $\angle SEC = 90^\circ$ 的点 E 的个数是__.

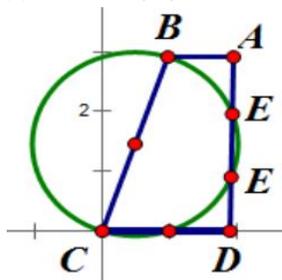


方法一: 坐标运算



$$\overrightarrow{ES} \cdot \overrightarrow{EC} = 0, \text{所以 } x^2 - 3x + 2 = 0, \text{所以 } x = 1 \text{ 或 } x = 2$$

方法二：线线垂直→线面垂直→线线垂直，将立体问题转化为平面问题。



3. 如图，棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， M 是棱 AA_1 的中点，点 P 在侧面 ABB_1A_1 内，若 D_1P 垂直于 CM ，则 $\triangle PBC$ 的面积的最小值为_____。

方法一：坐标运算

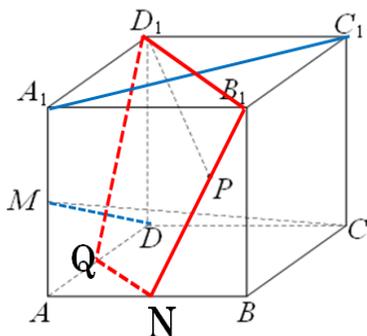
$$\overrightarrow{D_1P} \cdot \overrightarrow{CM} = 2y - z - 2 = 0, \text{ 所以 } P \text{ 的轨迹是直线}$$

所以 P 在线段 B_1N 上运动。

因为 $\triangle PBC$ 是直角三角形，所以转化为求 BP 长度的最小值

$$\text{此时 } (S_{\triangle PBC})_{\min} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

方法二：作垂面

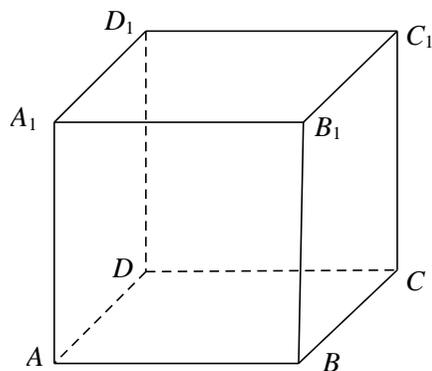


4. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，动点 M 在线段 CC_1 上，动点 P 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 上，且

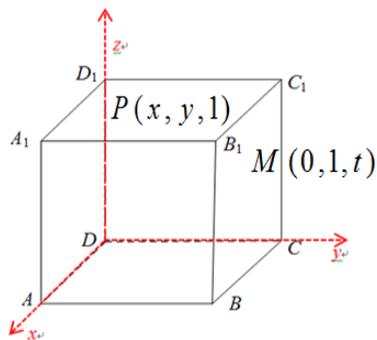
$$AP \perp \text{平面 } MBD_1.$$

(I) 当点 M 与点 C 重合时，线段 AP 的长度为_____；

(II) 线段 AP 长度的最小值为_____。



方法一：坐标运算



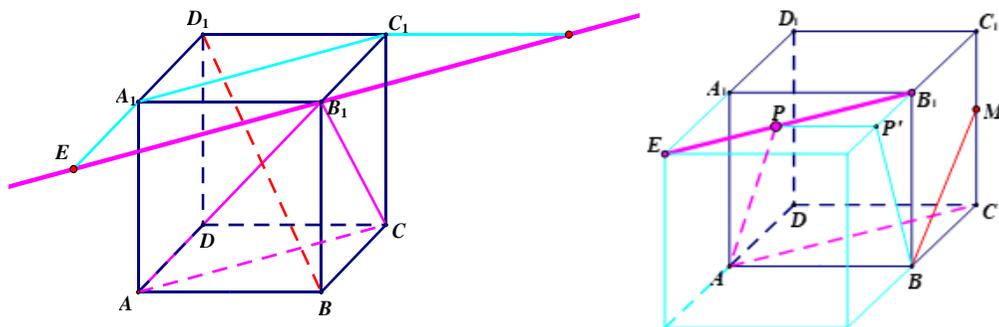
由 $AP \perp$ 平面 MBD_1

得 $\begin{cases} \overline{AP} \cdot \overline{MB} = 0 \\ \overline{AP} \cdot \overline{BD_1} = 0 \end{cases}$, 整理得到 $\begin{cases} x=t+1 \\ y=1-t \end{cases}$

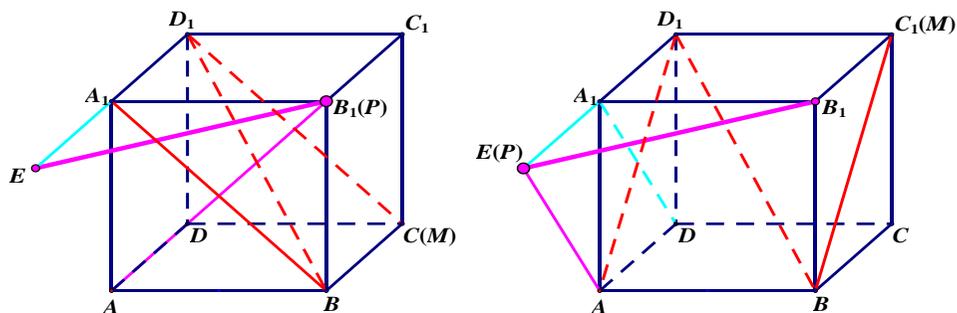
$$|AP| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + 1} = \sqrt{2t^2 - 2t + 2}$$

$$\text{当 } t = \frac{1}{2} \text{ 时, } |AP|_{\min} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

方法二：作垂面



方法三：极限法



【小结】

方法一：（数）建立空间直角坐标系，通过坐标运算，求解轨迹方程，从而判断轨迹，解决问题。

方法二：（形）通过构造辅助线（比如构造垂线、垂面、平行线、平行面等），利用空间位置关系，直接解决问题。