《椭圆综合问题探究》教学活动方案

学习目标：

1. 在掌握椭圆的定义、标准方程及简单几何性质的基础上，探究椭圆综合问题解题思路；

2. 理解解析几何的本质是“根据对图形的分析，探索解题的思路，运用代数方法得到结论，给出代数结论合理的几何解释，解决几何问题”.

学法指导：

认真研究图形几何特征，准确作出图形是解题基础，也是解题关键.

教学过程：

椭圆是重要的圆锥曲线，在实际中有着广泛的应用．探究椭圆问题的解决过程，能充分体现解析几何问题的解题思路和解题方法.

例 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的离心率为$\dfrac{1}{2}$，以原点为圆心，椭圆的短半轴为半径的圆与直线$x-y+\sqrt{6}=0$相切.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）设$P(4,0)$，A，B是椭圆C上关于x轴对称的任意两个不同的点，连结PB交椭圆C于另一点E，证明直线AE与x轴相交于定点Q；

（Ⅲ）在（Ⅱ）的条件下，过点Q的直线与椭圆C交于M，N两点，求$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$的取值范围.

解：（Ⅰ）由题意可知离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，

所以$e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=\dfrac{1}{4}$．即$a^2=\dfrac{4}{3}b^2$.

又因为以原点为圆心，椭圆的短半轴为半径的圆与

直线$x-y+\sqrt{6}=0$相切，

所以 $b=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{3}$，所以$a^2=4$，$b^2=3$.

故椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（Ⅱ）由题意知直线PB的斜率存在，设直线PB的方程为$y=k(x-4)$.

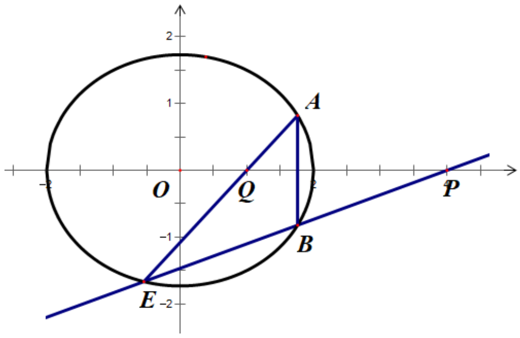
由$\begin{cases} y=k(x-4), \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1. \end{cases}$ 得$(4k^2+3)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$.

由$\Delta=(-32k^2)^2-4(4k^2+3)(64k^2-12)>0$，得$-\dfrac{1}{2}<k<\dfrac{1}{2}$.

设点$B(x_1,y_1)$，$E(x_2,y_2)$，则$A(x_1,-y_1)$.

所以 $x_1+x_2=\dfrac{32k^2}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\dfrac{64k^2-12}{4k^2+3}$.　　　①

直线AE的方程为$y-y_2=\dfrac{y_2+y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)$.



令$y=0$，得$x=x_2-\dfrac{y_2(x_2-x_1)}{y_2+y_1}$.

将$y_1=k(x_1-4)$，$y_2=k(x_2-4)$代入，

得$x=x_2-\dfrac{k(x_2-4)(x_2-x_1)}{k(x_2-4)+k(x_1-4)}$

$=x_2-\dfrac{(x_2-4)(x_2-x_1)}{x_1+x_2-8}$

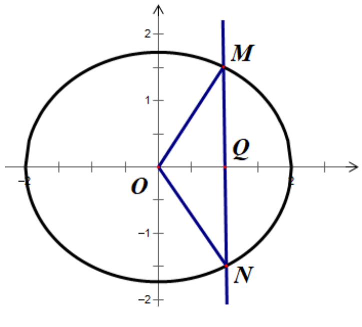
$=\dfrac{x_1x_2+x_2^2-8x_2-(x_2^2-x_1x_2-4x_2+4x_1)}{x_1+x_2-8}=\dfrac{2x_1x_2-4(x_1+x_2)}{x_1+x_2-8}$.

将①代入，得$x=\dfrac{\dfrac{2(64k^2-12)}{4k^2+3}-\dfrac{4(32k^2)}{4k^2+3}}{\dfrac{32k^2}{4k^2+3}-8}=\dfrac{2\times64k^2-24-4\times32k^2}{32k^2-32k^2-24}=1.$

所以直线AE与x轴相交于定点$Q(1,0)$.

（III）（1）当过点Q直线MN的斜率不存在时，不妨设点M在x轴上方，

则MN的方程为$x=1$.



可解得$M(1,\dfrac{3}{2})$，$N(1,-\dfrac{3}{2})$，

所以$\overrightarrow{OM}=(1,\dfrac{3}{2}),\overrightarrow{ON}=(1,-\dfrac{3}{2})$，

此时$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=1-\dfrac{9}{4}=-\dfrac{5}{4}$.

（2）当过点Q直线MN的斜率存在时，

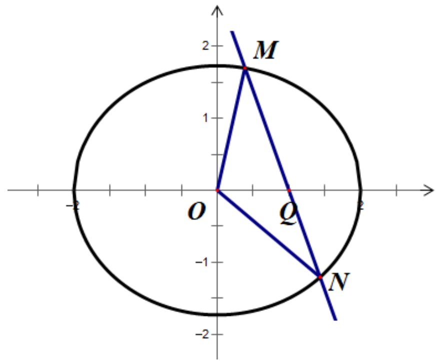
设直线 MN 的方程为 $y=m(x-1)$，且

$M(x_M,y_M)$， $N(x_N,y_N)$ 在椭圆 C 上.

由 $\begin{cases} y=m(x-1), \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1. \end{cases}$ 得 $(4m^2+3)x^2-8m^2x+4m^2-12=0$.

易知 $\Delta>0$.

由韦达定理，得



$$x_M+x_N=\frac{8m^2}{4m^2+3}, \quad x_Mx_N=\frac{4m^2-12}{4m^2+3},$$

所以 $y_My_N=m(x_M-1)\cdot m(x_N-1)$

$$=m^2[x_Mx_N-(x_M+x_N)+1]$$

$$=m^2(\frac{4m^2-12}{4m^2+3}-\frac{8m^2}{4m^2+3}+1)$$

$$=\frac{m^2(4m^2-12-8m^2+4m^2+3)}{4m^2+3}=-\frac{9m^2}{4m^2+3}.$$

则 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_Mx_N+y_My_N=\dfrac{4m^2-12}{4m^2+3}-\dfrac{9m^2}{4m^2+3}$

$$=-\frac{5m^2+12}{4m^2+3}=-\frac{5}{4}-\frac{33}{4(4m^2+3)}.$$

因为 $m^2\ge 0$，所以 $-\dfrac{11}{4}\le-\dfrac{33}{4(4m^2+3)}<0$，所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}\in[-4,-\dfrac{5}{4})$.

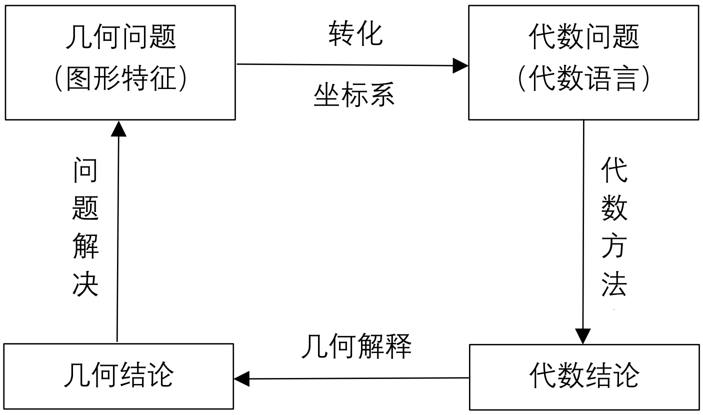
综上所述，$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 的取值范围是 $[-4,-\dfrac{5}{4}]$.

注： MN 的方程也可设为横截距式 $x=my-1$

小结：

平面解析几何解决问题的基本过程：

根据具体问题情境的特点，建立平面直角坐标系；根据几何问题和图形的特点，用代数语言把几何问题转化成为代数问题；根据对几何问题（图形）的分析，探索解决问题的思路，运用代数方法得到结论，给出代数结论合理的几何解释，解决几何问题.（课标原文）



课后作业（见附件）