

圆锥曲线中的定值问题-----导学案

一、学习目标:

- 1、根据已知条件，将已知条件中的几何特征转化为代数表示，通过合理转化，分析解题思路，选择恰当变量和解
题方法解决问题，体会数形结合、转化与化归、特殊与一般的数学思想方法.
- 2、对于定值问题，用特殊探索法(特殊值、特殊位置、特殊图形等)先猜出定值，揭开神秘的面纱，这样可将盲目
的探索问题转化为有方向有目标的一般性证明题，从而找到解决问题的突破口.

二、学习重点和难点：将已知条件中的几何特征转化为代数表示

三、教学过程

例：椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，且 $|PF_1| + |PF_2| = 4$.

(I) 求椭圆 C 的方程

(II) 若点 $P(\sqrt{2}, 1)$ 在椭圆 C 上，设点 P 关于 x 轴的对称点为 Q ， M 是椭圆 C 上一点，直线 MP 和 MQ 与 x 轴
分别相交于点 E ， F ， O 为原点. 证明： $|OE| \cdot |OF|$ 为定值.

分析：根据已知条件可以求出椭圆 C 的方程是 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

问题 1：点 $P(\sqrt{2}, 1)$ 关于 x 轴的对称点为 Q ，它的坐标是什么？点关于坐标轴对称有哪些特征，如何表示？

关于点对称如何表示呢？

问题 2：根据题意画出图形，你能选取一个特殊位置，猜出这个定值是多少吗？

问题 3：分析已知条件，哪个是主动变元？怎样设未知量？怎样将几何特征转化为代数表示？

几何特征	代数表示
点 P 关于 x 轴的对称点为 Q	
M 是椭圆 C 上一点	
直线 MP 与 x 轴交于点 E	
直线 MQ 与 x 轴交于点 F	
$ OE $	
$ OF $	

解题过程：

变式 若将上题（Ⅱ）中的点 P 改为椭圆上任意一点，设点 P 关于 x 轴的对称点为 Q ，（ P, Q 两点不重合）

M 是椭圆 C 上一点，直线 MP 和 MQ 与 x 轴分别相交于点 E, F ， O 为原点。那么 $|OE| \cdot |OF|$ 还是定值吗？如果是，请你证明，如果不是，说明理由。

分析：是否为定值，由例题我们知道，当点 $P(\sqrt{2}, 1)$ 可以是定值 4，可以考虑再找一个特殊位置验证是否为定值，如果是就开始证明，如果不是正好是反例，问题就解决了。

验证是成立的，我们就要一般化：都是变化的， P, Q 两点和点 M 都是变化的，但是 P, Q 两点相对不变的，他们定了，点 M 是变化的。所以可以先让 P, Q 两点定下来。

提示：

P 关于 x 轴的对称点为 Q ，设 P, Q 两点坐标分别为 $P(t, n)$ ， $Q(t, -n)$ ，

从而 $t^2 + 2n^2 = 4$

设 $M(x_0, y_0)$ ，则有 $x_0^2 + 2y_0^2 = 4$ ， $x_0 \neq t$ ， $y_0 \neq \pm n$ 。

参数多不可怕，在后面的运算中一定可以消掉。

下面根据条件可以将几何条件转化为代数表示，进行求解。

解题过程：

拓展 1： 若将例题中条件改为：

设点 $P(\sqrt{2}, 1)$ 关于 y 轴的对称点为 Q ， M 是椭圆 C 上一点，直线 MP 和 MQ 与 y 轴分别相交于点 E, F ， O 为原点，那么结论 $|OE| \cdot |OF|$ 为定值是否成立呢？请你试一试？

拓展 2： 若将例题中条件改为：点 P 改为椭圆上任意一点，设点 P 关于 y 轴的对称点为 Q ，

（ P, Q 两点不重合） M 是椭圆 C 上一点，直线 MP 和 MQ 与 y 轴分别相交于点 E, F ， O 为原点。那么 $|OE| \cdot |OF|$ 还是定值吗？如果是，请你证明，如果不是，说明理由。

练习：（2016 北京高考题）已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $A(a, 0)$ ， $B(0, b)$ ， $O(0, 0)$ ， $\triangle OAB$ 的面积为 1。

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设 P 是椭圆 C 上一点，直线 PA 与 y 轴交于点 M ，直线 PB 与 x 轴交于点 N 。

求证： $|AN| \cdot |BM|$ 为定值。

四、收获与体会：