



朝阳区线上课堂·高二数学

一道圆锥曲线高考题的 解法探究

北京市第八十中学 魏 烁

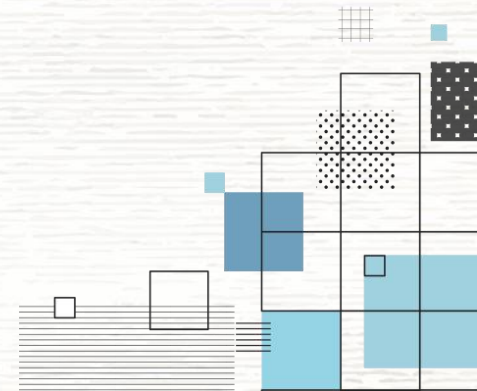
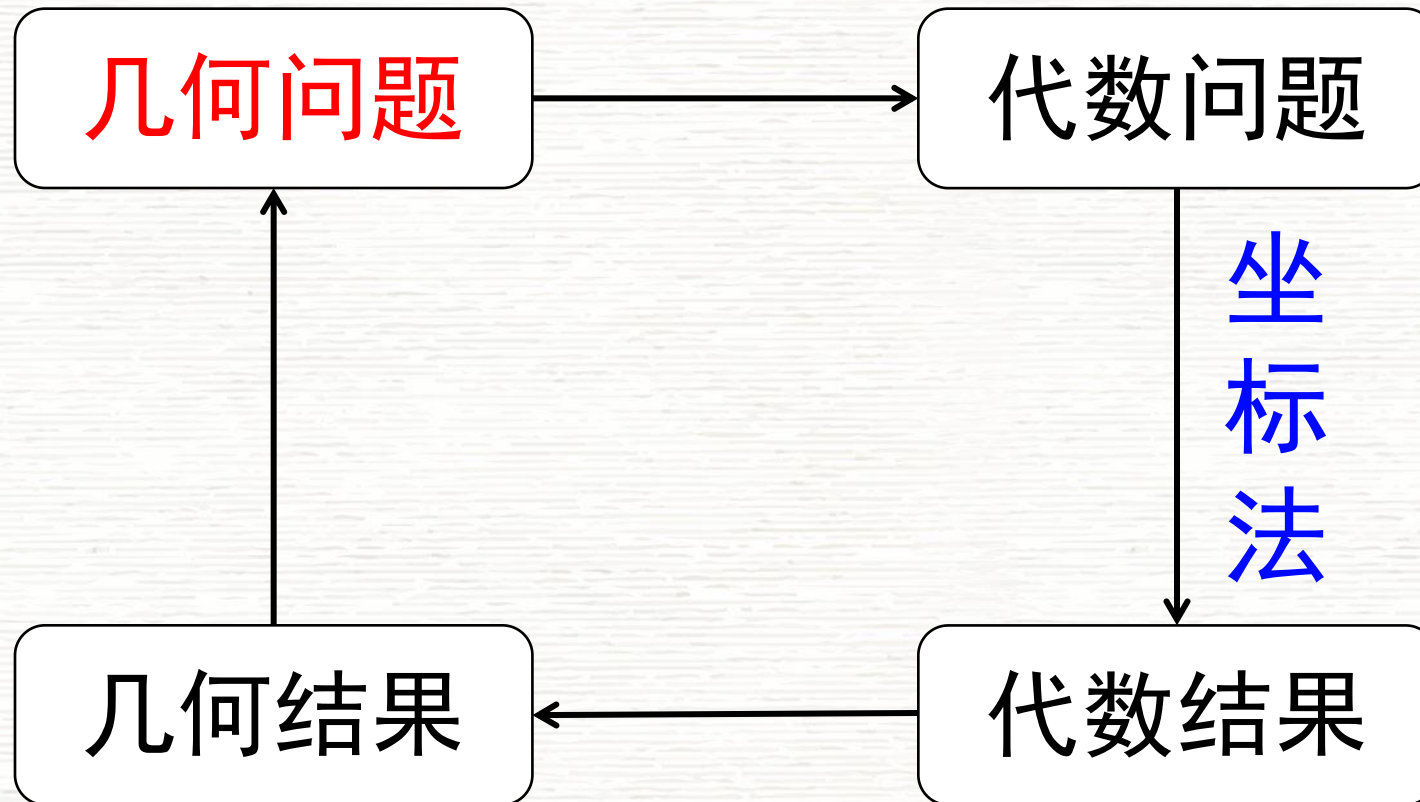


核心方法是用代数的方法研究图形的几何性质

几何问题

核心思想是“数形结合”







在具体解答过程中，一般要经历这样几个环节

- (1) 要明白试题要解决的是什么几何问题；
- (2) 要清楚解决这个几何问题需要用到哪些代数条件，把几何问题代数化，有时候这个代数化过程不是很直观，需要把几何问题转化为另一个等价的几何问题后再进行代数化；
- (3) 利用已知的题设条件分析这些条件之间的联系，研究并解决转化之后的代数问题；
- (4) 要返回去解决几何问题。





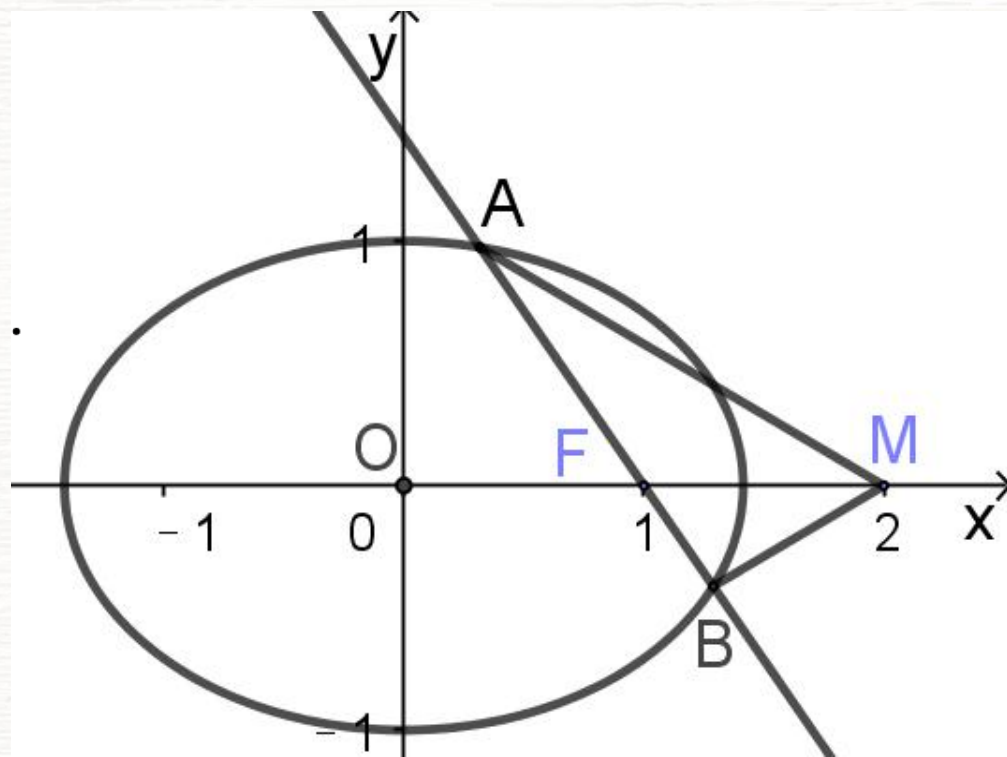
以2018 年高考全国卷 I 理科第 19 题为例

设椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F ，过 F

的直线 l 与 C 交于 A, B 两点，点 M 的坐标为 $(2, 0)$ 。

(1) 当 l 与 x 轴垂直时，求直线 MA 的方程；

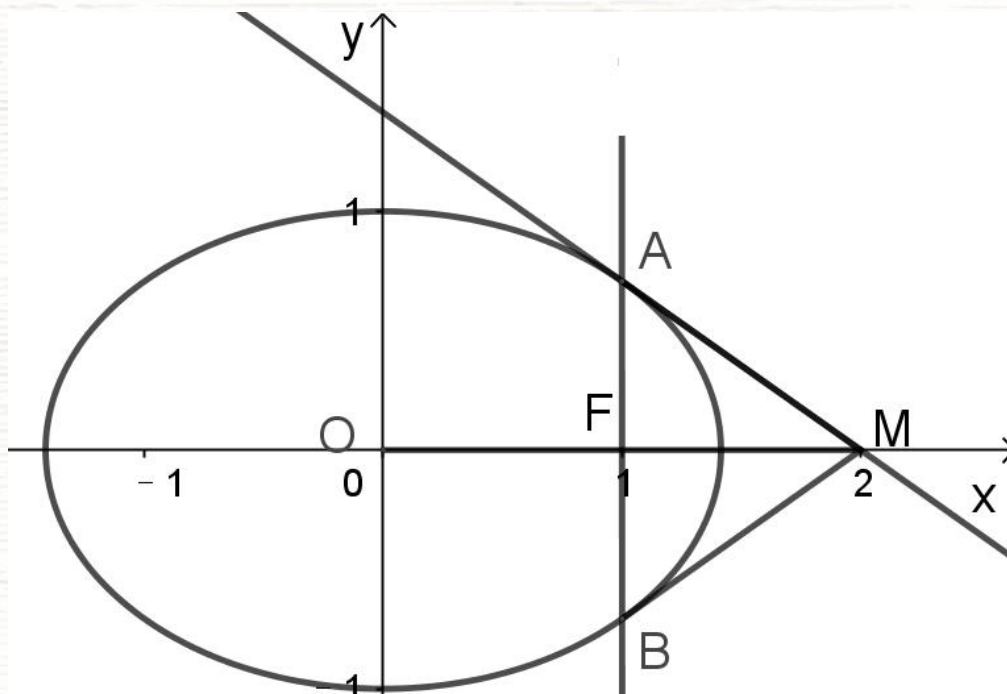
(2) 设 O 为坐标原点，证明： $\angle OMA = \angle OMB$ 。





(1) 根据 l 与 x 轴垂直, 且过点 $F(1,0)$, 求得直线 l 的方程为 $x=1$,

代入椭圆方程求得点 $A(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 或 $(1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, 即可求得直线 AM 的方程;



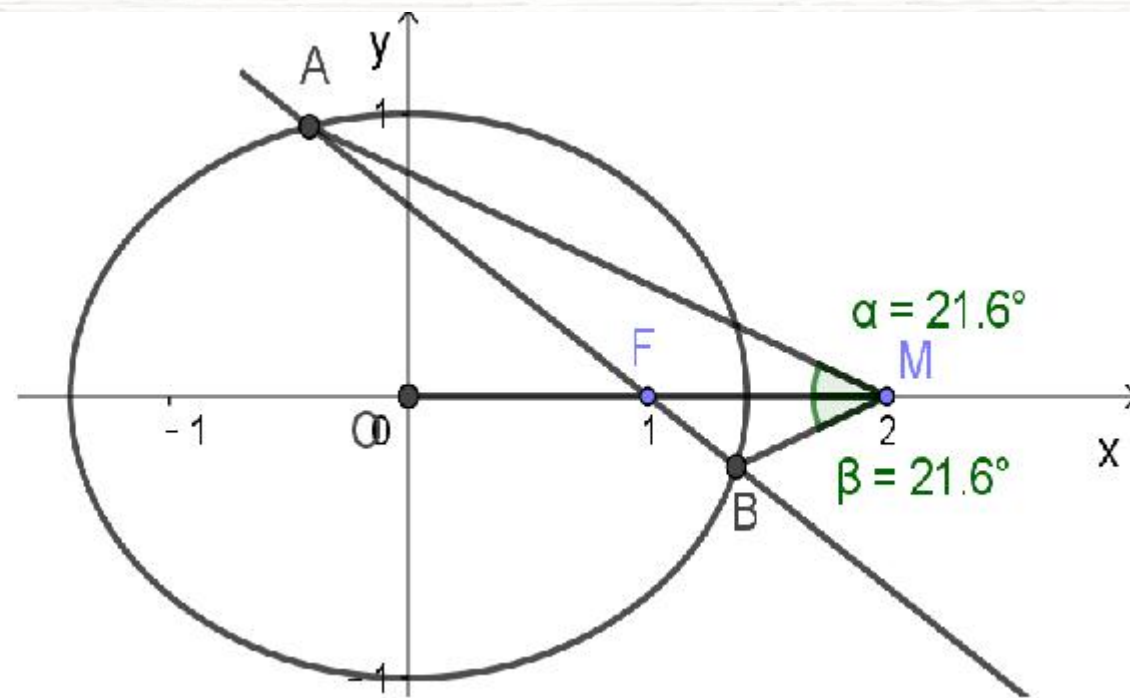
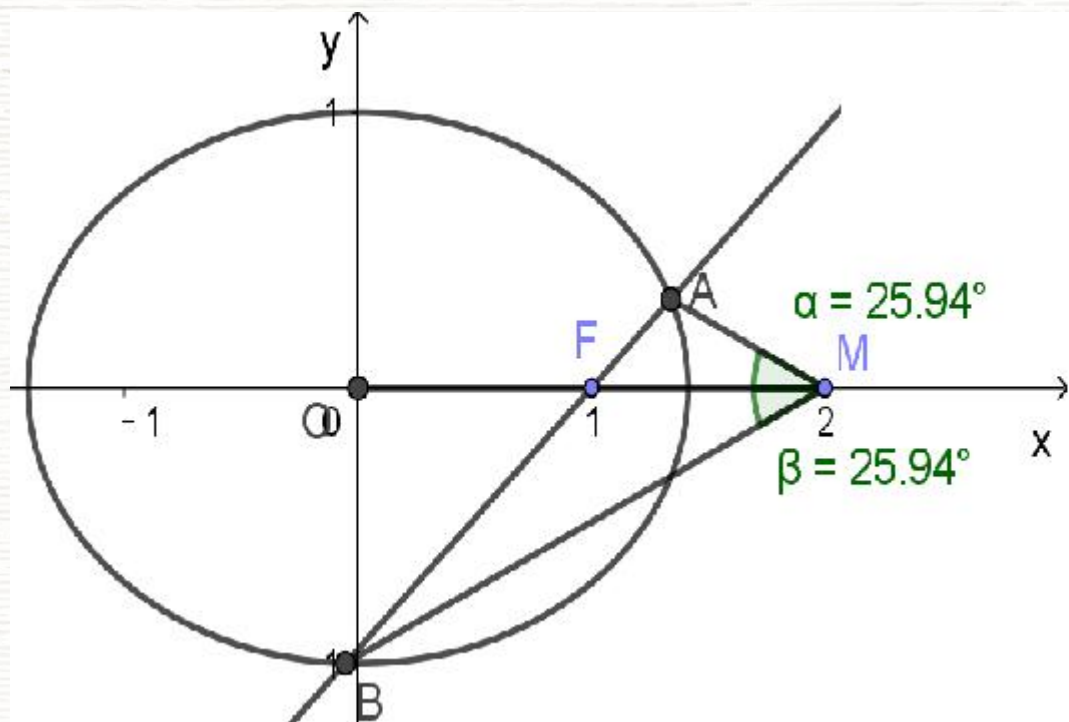


明确几何问题：

$$\angle OMA = \angle OMB$$

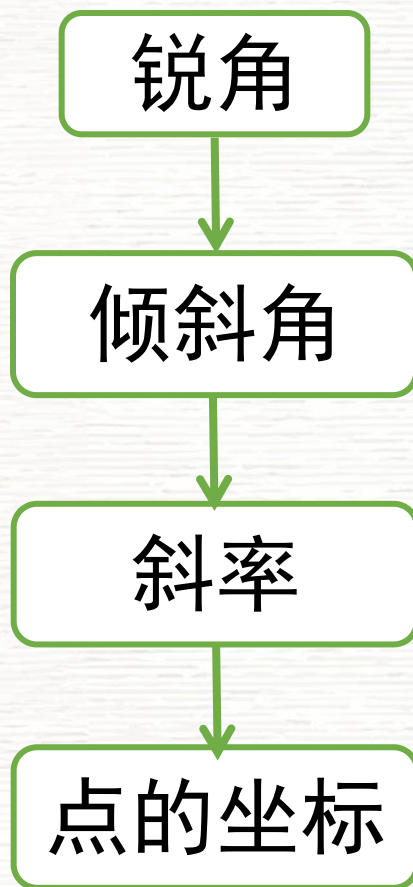
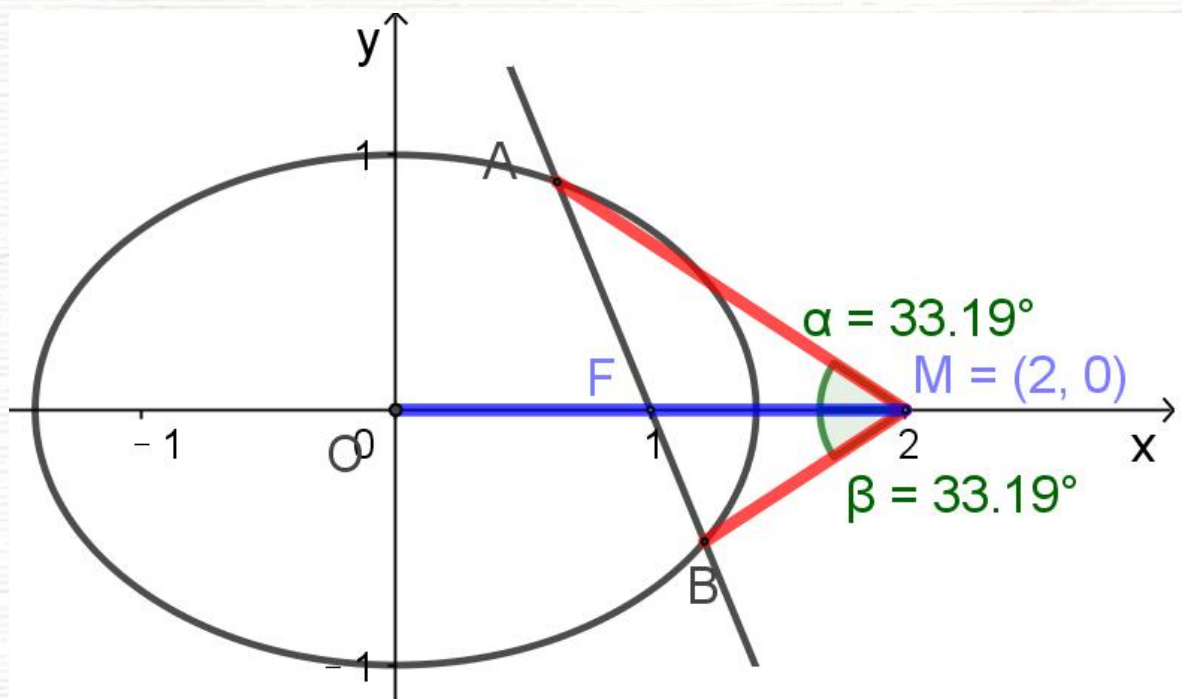
解法一

运动变化过程中的不变性（这里指不变关系）





这两个角有什么特点？你能由此将这个几何关系和哪些代数知识建立联系？

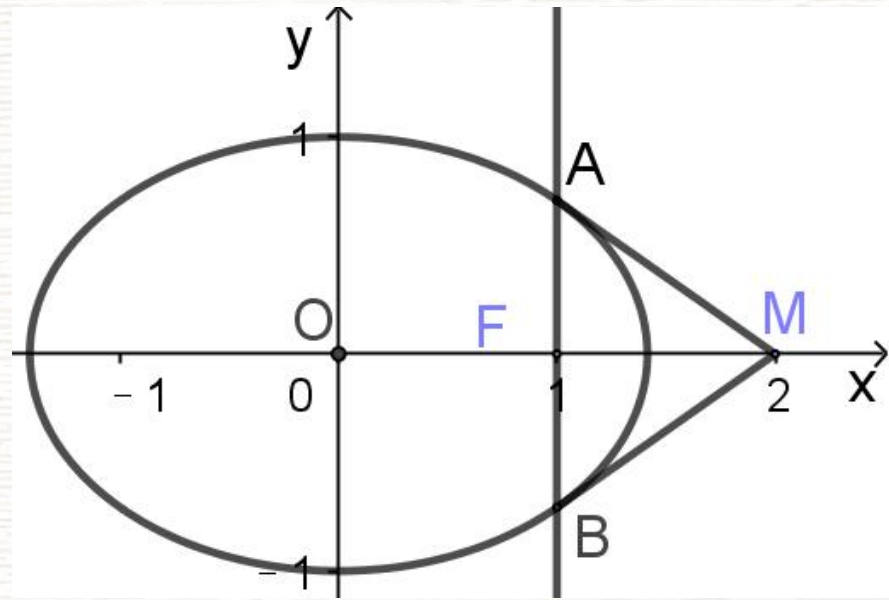
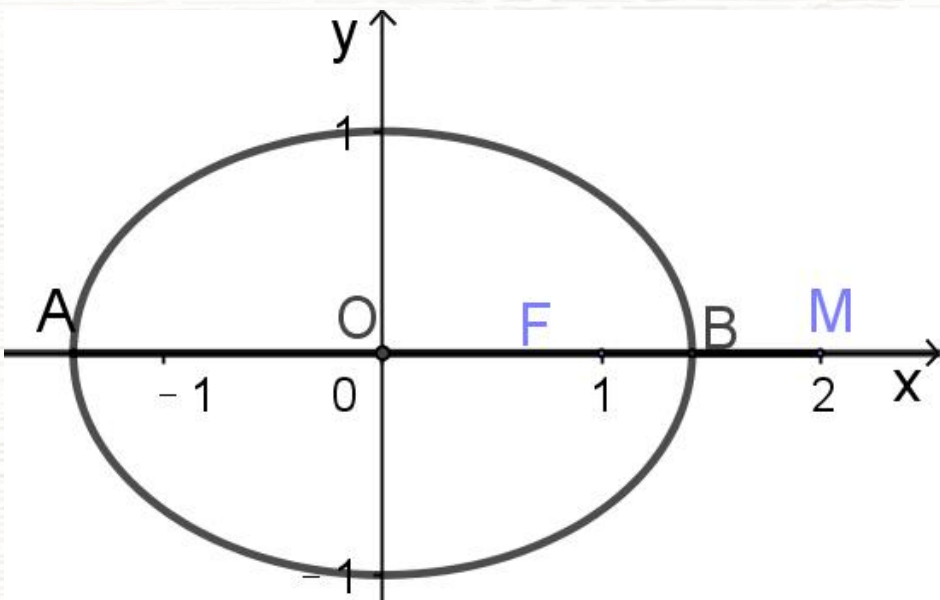


几何问题代数化



当 l 与 x 轴重合时, $\angle OMA = \angle OMB = 0^\circ$.

当 l 与 x 轴垂直时, OM 为 AB 的垂直平分线, 所以 $\angle OMA = \angle OMB$.



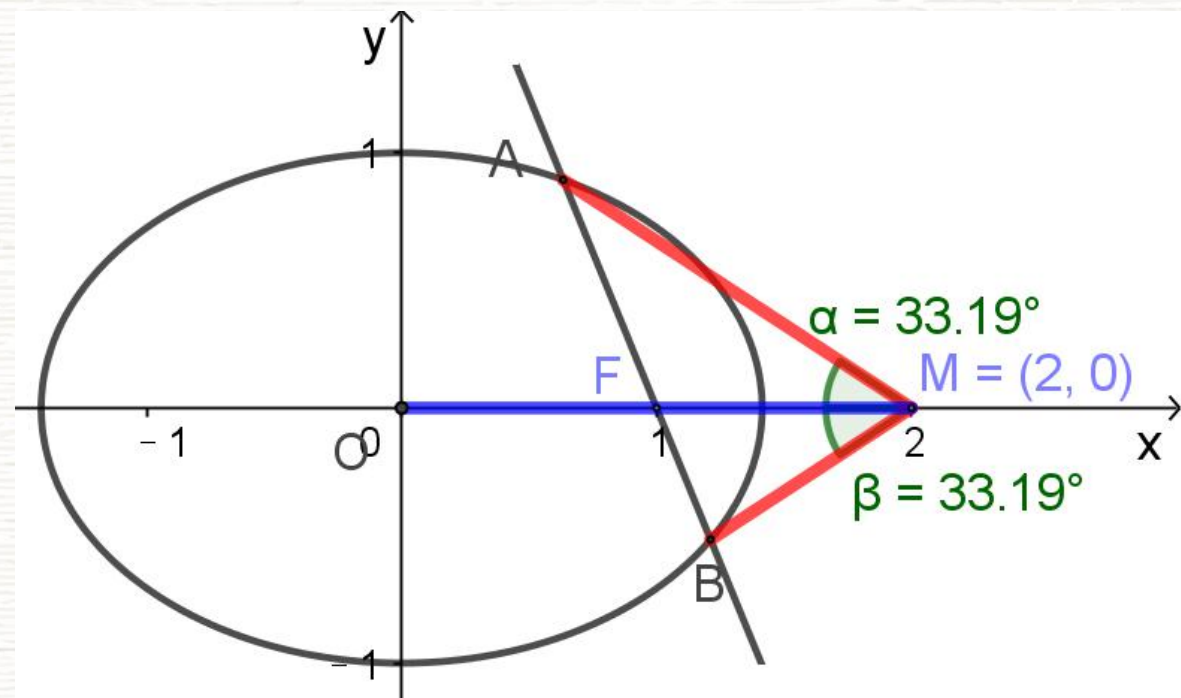


当 l 与 x 轴不重合也不垂直时, 设 l 的方程为 $y = k(x-1) (k \neq 0)$,

$$A(x_1, y_1) (y_1 > 0), B(x_2, y_2) (y_2 < 0), \quad |x_1| < \sqrt{2}, |x_2| < \sqrt{2}$$

$$k_{MA} + k_{MB} = \frac{y_1}{x_1 - 2} + \frac{y_2}{x_2 - 2}$$

$$k_{MA} + k_{MB} = \frac{2kx_1x_2 - 3k(x_1 + x_2) + 4k}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}$$





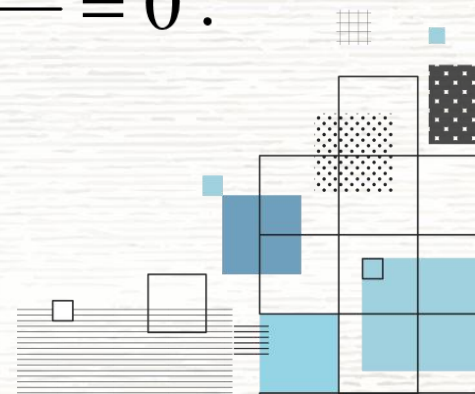
研究代数问题

将 $y = k(x-1)$ 代入 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$,

得 $(2k^2 + 1)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0$,

所以, $x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{2k^2 + 1}, x_1x_2 = \frac{2k^2 - 2}{2k^2 + 1}$,

则 $2kx_1x_2 - 3k(x_1 + x_2) + 4k = \frac{4k^3 - 4k - 12k^3 + 8k^3 + 4k}{2k^2 + 1} = 0$.





从而 $k_{MA} + k_{MB} = 0$ ，故 MA 、 MB 的倾斜角互补，

所以 $\angle OMA = \angle OMB$.

综上， $\angle OMA = \angle OMB$.

解决几何问题





解法二

代数问题
斜率之和为0

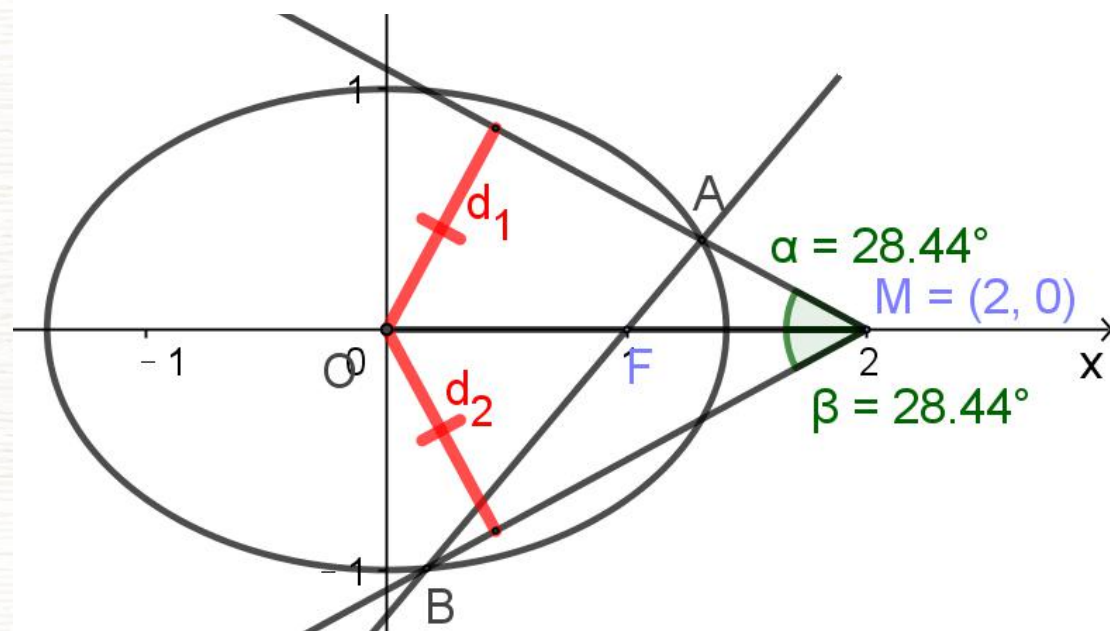
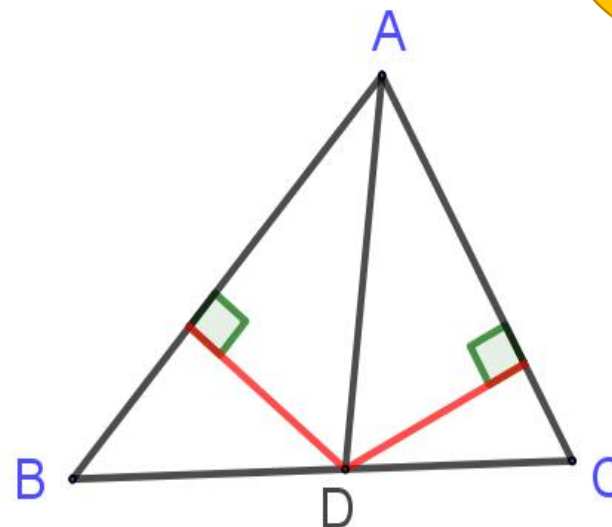
距离
相等

代数化

代数化

几何问题
 $\angle OMA = \angle OMB$

另一个
几何问题

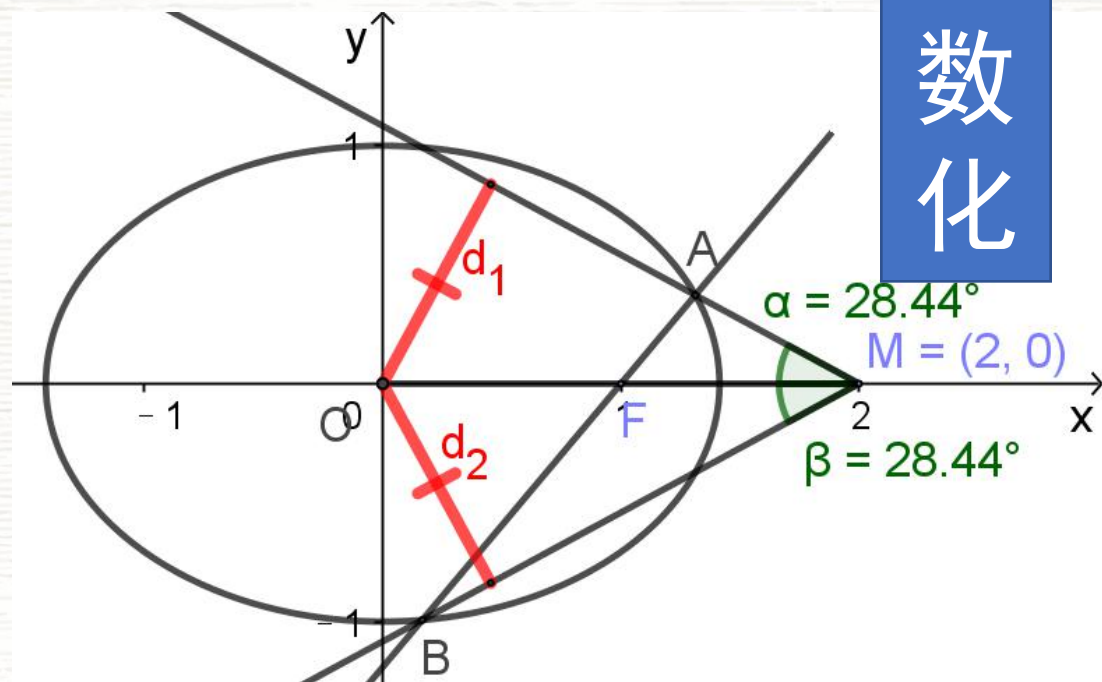


直线 MA 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1 - 2}(x - 2)$ ，即 $y_1x + (2 - x_1)y - 2y_1 = 0$

直线 MB 的方程为 $y = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2)$ ，即 $y_2x + (2 - x_2)y - 2y_2 = 0$

设原点 O 到直线 MA ， MB 的距离分别为 d_1, d_2 ，

$$d_1 = \frac{|2y_1|}{\sqrt{y_1^2 + (2 - x_1)^2}}, \quad d_2 = \frac{|2y_2|}{\sqrt{y_2^2 + (2 - x_2)^2}},$$



要证 $d_1 = d_2$,

只需证:
$$\frac{|2y_1|}{\sqrt{y_1^2 + (2-x_1)^2}} = \frac{|2y_2|}{\sqrt{y_2^2 + (2-x_2)^2}},$$

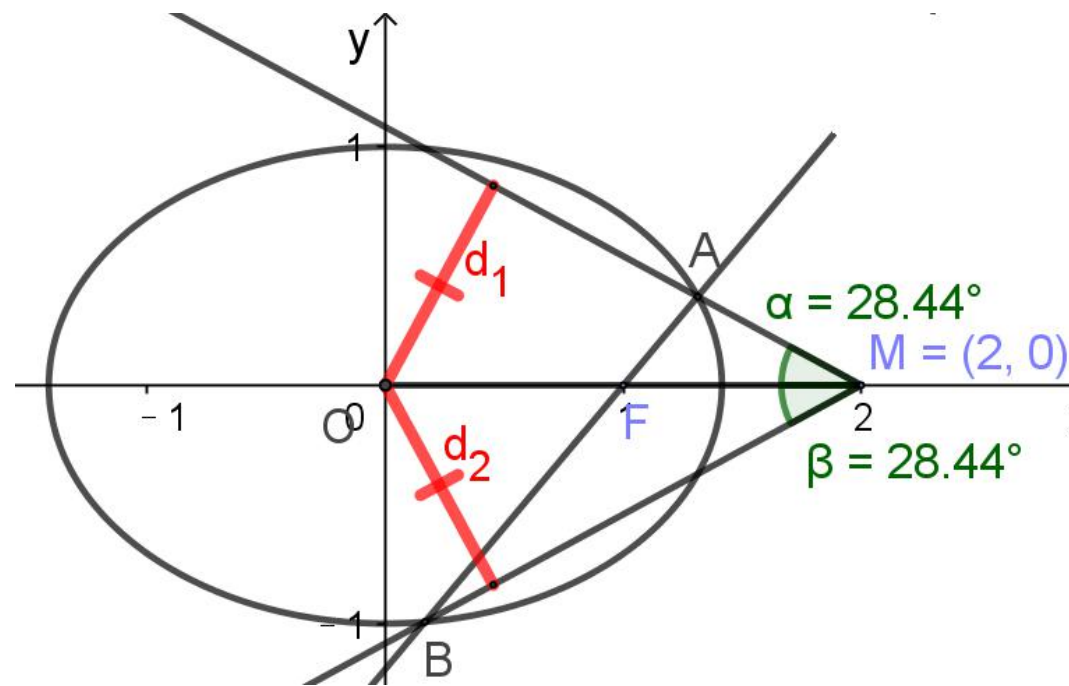
即证:
$$\frac{y_1^2}{y_1^2 + (2-x_1)^2} = \frac{y_2^2}{y_2^2 + (2-x_2)^2}$$

即证: $y_1^2(2-x_2)^2 = y_2^2(2-x_1)^2$

由于 $|x_1| < \sqrt{2}, |x_2| < \sqrt{2}, y_1 > 0, y_2 < 0$,

即证: $y_1(2-x_2) = -y_2(2-x_1)$,

即证: $2(y_1 + y_2) = x_1y_2 + x_2y_1$,





研究代数问题

将直线 $y = k(x-1)$ 代入椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$,

得 $(2k^2 + 1)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0$,

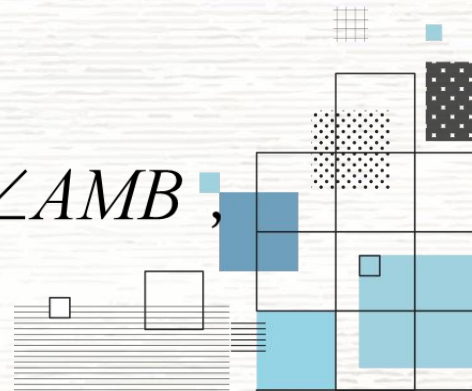
所以 $x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{2k^2 + 1}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{2k^2 - 2}{2k^2 + 1}$

则 $2(y_1 + y_2) = 2k(x_1 + x_2 - 2) = 2k\left(\frac{4k^2}{2k^2 + 1} - 2\right) = \frac{-4k}{2k^2 + 1}$,

$x_1y_2 + x_2y_1 = x_1 \cdot k(x_2 - 1) + x_2 \cdot k(x_1 - 1) = 2kx_1x_2 - k(x_1 + x_2)$
 $= \frac{2k \cdot (2k^2 - 2)}{2k^2 + 1} - k \cdot \frac{4k^2}{2k^2 + 1} = \frac{-4k^2}{2k^2 + 1}$

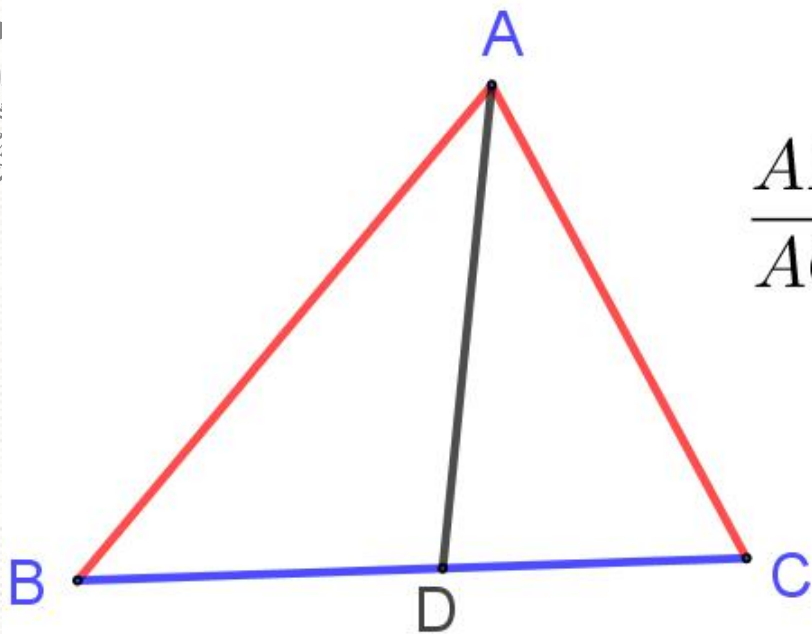
所以 $2(y_1 + y_2) = x_1y_2 + x_2y_1$, 进而可得 $d_1 = d_2$,

依据三角形内角平分线性质定理的逆定理, 可知 OM 平分 $\angle AMB$,
所以 $\angle OMA = \angle OMB$.



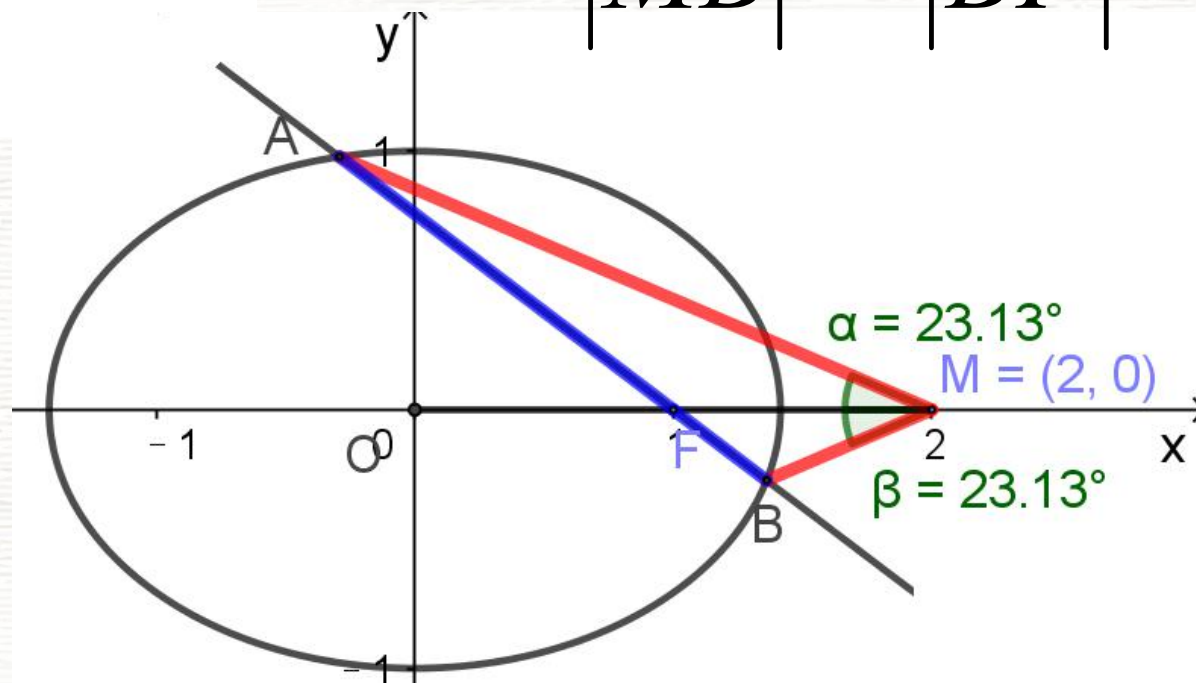


解法三



$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

$$\frac{|MA|}{|MB|} = \frac{|AF|}{|BF|}$$



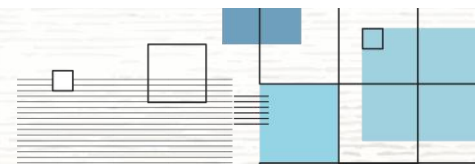
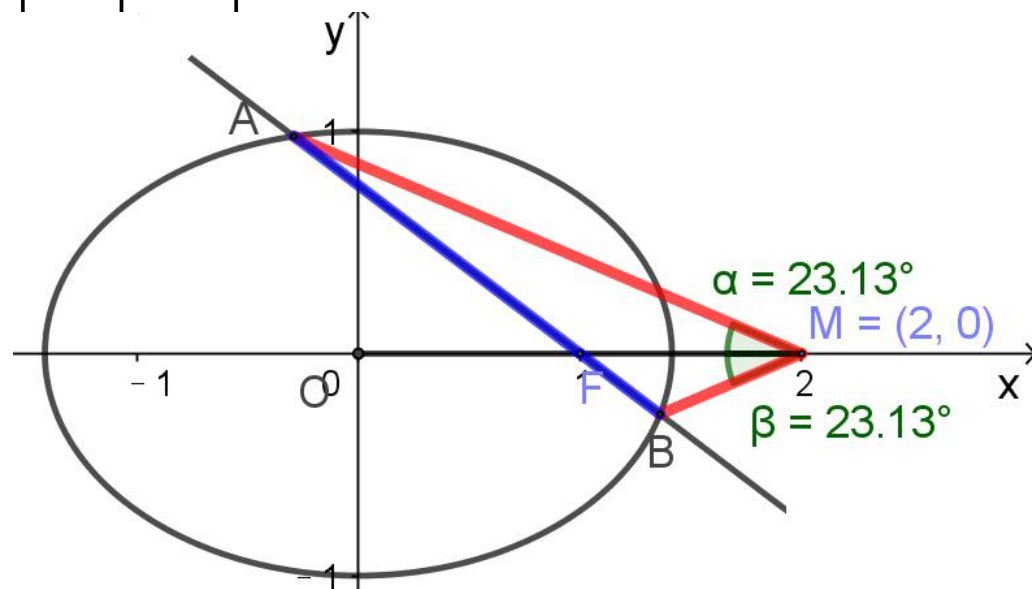
要证 MF 是 $\angle AMB$ 的内角平分线，只需证明：
$$\frac{|MA|}{|MB|} = \frac{|AF|}{|BF|}.$$

下面分别计算 $\frac{|MA|}{|MB|}$ 和 $\frac{|AF|}{|BF|}$.

$$\frac{|MA|}{|MB|} = \frac{\sqrt{y_1^2 + (2 - x_1)^2}}{\sqrt{y_2^2 + (2 - x_2)^2}}, \quad \frac{|AF|}{|BF|} = \frac{|y_1|}{|y_2|},$$

要证： $\frac{|MA|}{|MB|} = \frac{|AF|}{|BF|}$, 即证：
$$\frac{\sqrt{y_1^2 + (2 - x_1)^2}}{\sqrt{y_2^2 + (2 - x_2)^2}} = \frac{|y_1|}{|y_2|},$$

即证：
$$\frac{y_1^2 + (2 - x_1)^2}{y_2^2 + (2 - x_2)^2} = \frac{y_1^2}{y_2^2}$$



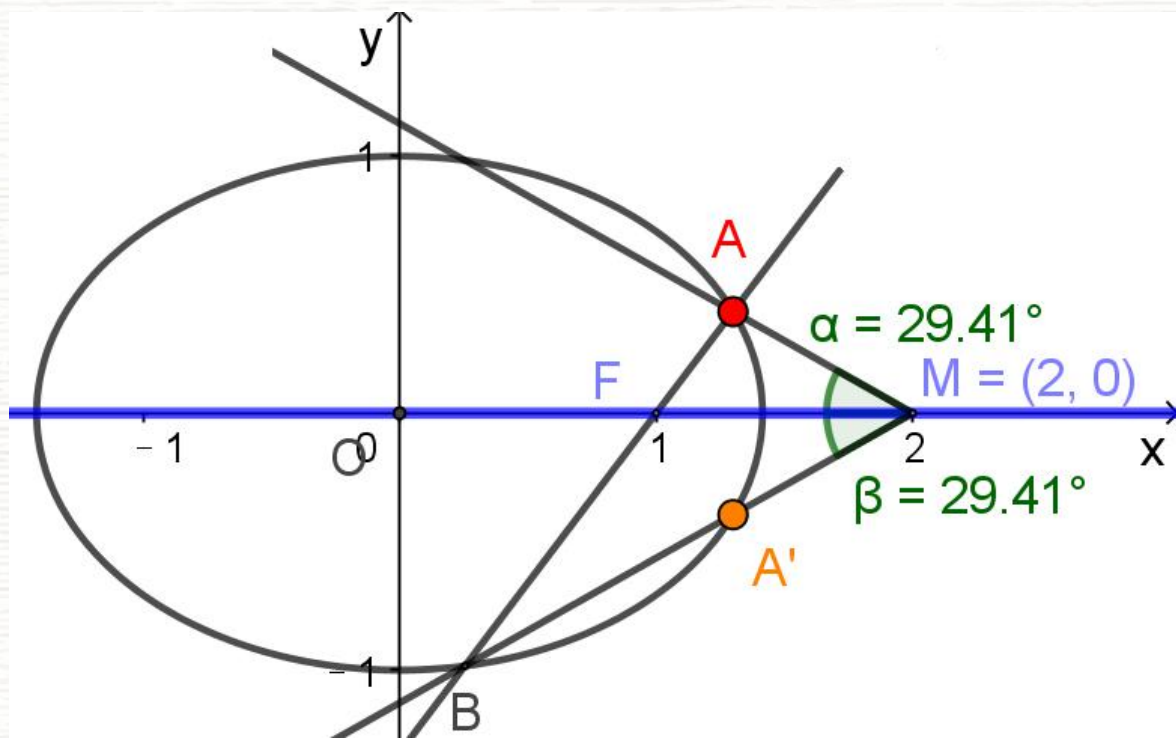


解法四

几何问题
 $\angle OMA = \angle OMB$

角平分线

对称





设点 A 关于 x 轴的对称点为 $A_1(x_1, -y_1)$,

要证 MF 是 $\angle AMB$ 的内角平分线,

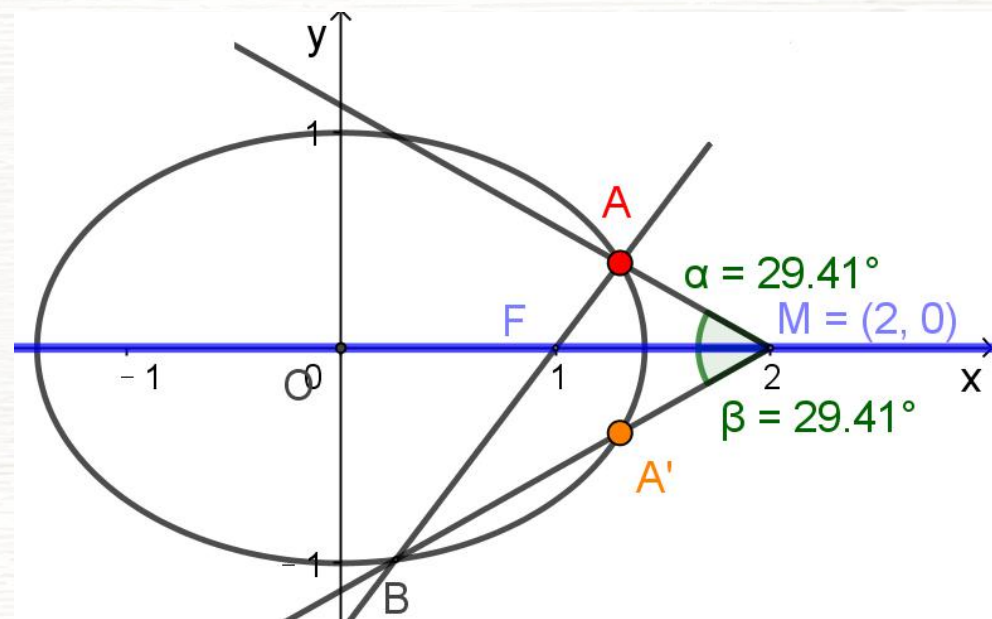
只需证明: 点 A 关于 x 轴的对称点 $A_1(x_1, -y_1)$ 在直线 MB 上.

即证: $A_1(x_1, -y_1)$ 的坐标符合直线 MB 的方程为 $y = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2)$,

即证: $-y_1 = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x_1 - 2)$

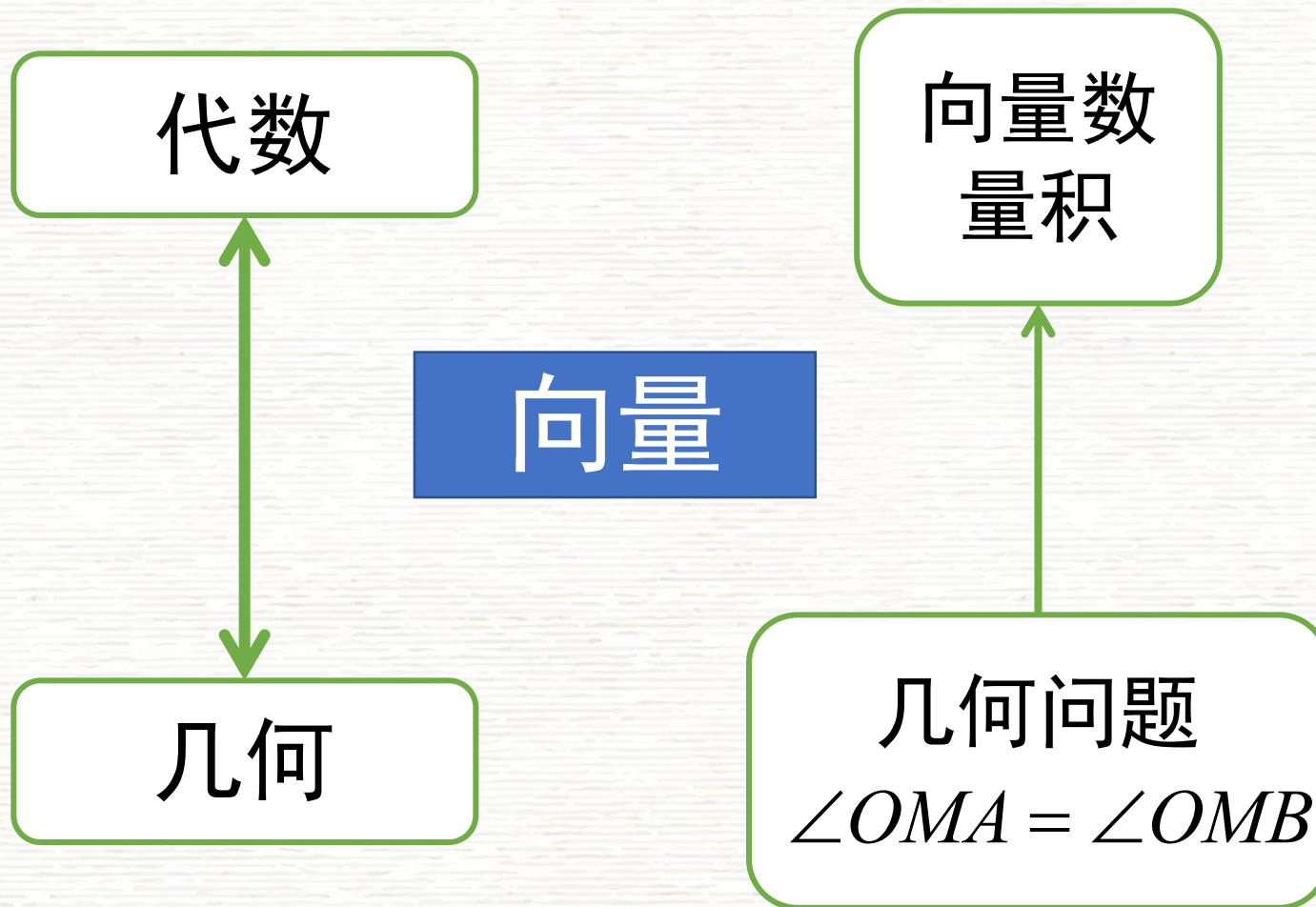
即证: $-y_1(x_2 - 2) = y_2(x_1 - 2)$

即证: $2(y_1 + y_2) = x_1 y_2 + x_2 y_1$,





解法五





$$\overrightarrow{OM} = (2, 0), \quad \overrightarrow{AM} = (2 - x_1, -y_1), \quad \overrightarrow{BM} = (2 - x_2, -y_2),$$

$$\text{所以 } \cos \angle OMA = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{AM}|} = \frac{2 \cdot (2 - x_1)}{2 \cdot \sqrt{(2 - x_1)^2 + y_1^2}},$$

$$\cos \angle OMB = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BM}}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{BM}|} = \frac{2 \cdot (2 - x_2)}{2 \cdot \sqrt{(2 - x_2)^2 + y_2^2}},$$

要证: $\cos \angle OMA = \cos \angle OMB$,

$$\text{只需证: } \frac{2 \cdot (2 - x_1)}{2 \cdot \sqrt{(2 - x_1)^2 + y_1^2}} = \frac{2 \cdot (2 - x_2)}{2 \cdot \sqrt{(2 - x_2)^2 + y_2^2}},$$

$$\text{即证: } \frac{(2 - x_1)^2}{(2 - x_1)^2 + y_1^2} = \frac{(2 - x_2)^2}{(2 - x_2)^2 + y_2^2},$$

$$\text{即证: } (2 - x_1)^2 \cdot y_2^2 = (2 - x_2)^2 \cdot y_1^2.$$





学法指导

- (1) 解析几何的核心方法是用代数的方法研究几何问题；
- (2) 在解题过程中，首先要将文字信息、图形条件进行转换，通过代数语言描述几何要素及其关系，将已知的几何条件表示成代数式，然后进行适当的代数运算得出代数结果，最后通过分析代数结果的几何含义解决几何问题；
- (3) 我们必须重视对几何关系的深入研究，探究用何种代数形式能恰当表示题目中的几何关系，同时有利于代数运算，从而形成正确的求解策略.





设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为

$F(c, 0)$ ，过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点，点 $M(\frac{a^2}{c}, 0)$ ，

设 O 为坐标原点，则 $\angle OMA = \angle OMB$.





感谢您的观看

北京市朝阳区教育研究中心 制作

