

一道圆锥曲线高考题的解法探究——学习任务单

【学习目标】

1. 能运用代数语言描述几何要素及其关系，将已知的几何条件表示成代数式，然后进行适当的代数运算得出代数结果，进而分析代数结果的几何含义解决几何问题；
2. 在问题解决过程中进一步体会解析几何的本质：用代数的方法研究几何问题。

【学法指导】

1. “几何问题代数化”是解决解析几何问题的关键；
2. 在探寻解题思路时，要善于从不同的角度分析，挖掘所求与其他知识的联系。

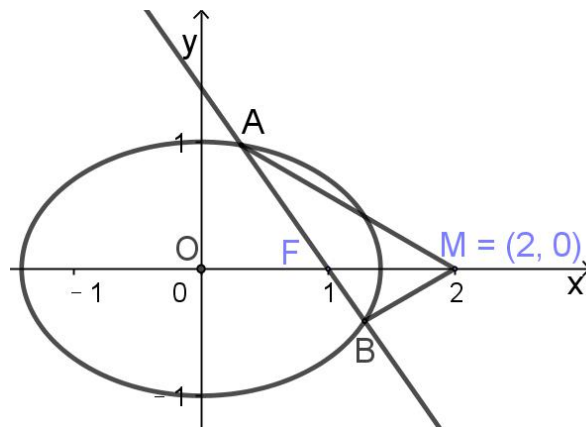
【学习任务】

题目（2018 年高考全国卷 I 理科第 19 题）

设椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F ，过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点，点 M 的坐标为 $(2, 0)$ 。

标为 $(2, 0)$ 。

- (1) 当 l 与 x 轴垂直时，求直线 MA 的方程；
- (2) 设 O 为坐标原点，证明： $\angle OMA = \angle OMB$ 。

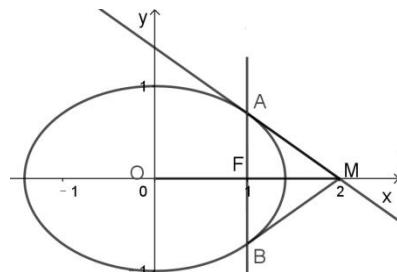


第一问的解答不再赘述

(1) 根据 l 与 x 轴垂直，且过点 $F(1, 0)$ ，求得直线 l 的方程为 $x = 1$ ，

代入椭圆方程求得点 $A(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 或 $(1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ ，即可求得直线

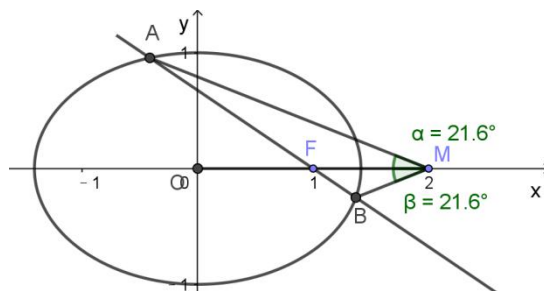
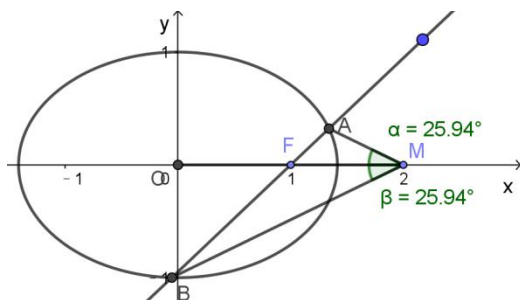
AM 的方程；



【任务一】 本题第二问要解决的几何问题是什么？

本题要解决的几何问题是“证明： $\angle OMA = \angle OMB$ ”，即两个角相等的问题。

审视这个几何关系，实际上，随着直线 l 绕着点 F 运动，直线 l 与椭圆的交点 A, B 也随之变化， O, M 是定点，则 $\angle OMA, \angle OMB$ 也随之变化，尽管两个角的大小在改变，但是它们之间的相等关系保持不变，这就是我们需要证明的几何关系，也是我们常说的运动变化过程中的不变性（这里指不变关系）。



【任务二】这两个角有什么特点？你能由此将这个几何关系和哪些代数知识建立联系？

仔细观察，这两个角具有一些典型特点，它们分别是直线 MA, MB 与 x 轴所成的锐角，因此，很自然的想到直线的倾斜角，解析几何中描述倾斜角的代数形式就是斜率，而斜率可以用两个点的坐标来表示，“几何关系代数化”就成了顺利成章的事情，这是解决解析几何问题的关键。

【任务三】梳理上述几何问题代数化的思路，写出解答过程。

当 l 与 x 轴重合时， $\angle OMA = \angle OMB = 0^\circ$ 。

当 l 与 x 轴垂直时， OM 为 AB 的垂直平分线，所以 $\angle OMA = \angle OMB$ 。

当 l 与 x 轴不重合也不垂直时，设 l 的方程为 $l: y = k(x-1) (k \neq 0)$ ，

$$A(x_1, y_1) (y_1 > 0), B(x_2, y_2) (y_2 < 0), |x_1| < \sqrt{2}, |x_2| < \sqrt{2}$$

（至于为什么要这样设直线方程，正是基于我们刚才对本题中的几何关系的分析， $\angle OMA = \angle OMB$ 这个几何关系是运动变化过程中保持的不变关系，而运动变化的根源正是过定点 F 的直线 l 的运动，进一步，即斜率存在时，产生变化的根源是直线的斜率。）

直线 MA 、 MB 的斜率之和为 $k_{MA} + k_{MB} = \frac{y_1}{x_1 - 2} + \frac{y_2}{x_2 - 2}$. (几何问题代数化)

$y_1 = k(x_1 - 1)$, $y_2 = k(x_2 - 1)$ 代入, 并化简

$$\text{得 } k_{MA} + k_{MB} = \frac{2kx_1x_2 - 3k(x_1 + x_2) + 4k}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}.$$

将 $y = k(x - 1)$ 代入 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

$$\text{得 } (2k^2 + 1)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0.$$

$$\text{所以, } x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{2k^2 + 1}, x_1x_2 = \frac{2k^2 - 2}{2k^2 + 1}.$$

$$\text{则 } 2kx_1x_2 - 3k(x_1 + x_2) + 4k = \frac{4k^3 - 4k - 12k^3 + 8k^3 + 4k}{2k^2 + 1} = 0. \text{ (研究代数问题)}$$

从而 $k_{MA} + k_{MB} = 0$, 故 MA 、 MB 的倾斜角互补,

所以 $\angle OMA = \angle OMB$.

综上, $\angle OMA = \angle OMB$. (解决几何问题)

【任务四】 几何问题代数化, 可能有不同的转化方向, 有时候需要把几何问题转化为另一个等价的几何问题后再进行代数化, 本题涉及到两角相等, 且两角有一条公共边, 由此你能联想到哪些平面几何知识?

不难想到: 三角形内角平分线性质的逆定理 1, 在角的内部到角的两边距离相等的点在这个角的角平分线上, 因此我们可以把两角相等这个几何问题转化为角平分线问题, 进而转化为点到直线的距离相等, 进而将其代数化, 解决问题。

当 l 与 x 轴不重合也不垂直时,

不妨设直线 $l: y = k(x - 1) (k \neq 0)$, $A(x_1, y_1) (y_1 > 0)$, $B(x_2, y_2) (y_2 < 0)$,

$$\text{且 } |x_1| < \sqrt{2}, |x_2| < \sqrt{2},$$

要表示点到直线的距离, 必然需要直线方程。

我们先用点斜式分别表示直线 MA 、直线 MB 的方程，再将其转化为一般式。

则直线 MA 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1 - 2}(x - 2)$ ，即 $y_1 x + (2 - x_1)y - 2y_1 = 0$

直线 MB 的方程为 $y = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2)$ ，即 $y_2 x + (2 - x_2)y - 2y_2 = 0$

至于点的选择，自然是越简单越好，因此我们选择直线 MF 上的点 O ，即坐标原点。

设原点 O 到直线 MA ， MB 的距离分别为 d_1, d_2 ，

$$d_1 = \frac{|2y_1|}{\sqrt{y_1^2 + (2 - x_1)^2}}, \quad d_2 = \frac{|2y_2|}{\sqrt{y_2^2 + (2 - x_2)^2}},$$

要证 $d_1 = d_2$ ，

$$\text{只需证 } \frac{|2y_1|}{\sqrt{y_1^2 + (2 - x_1)^2}} = \frac{|2y_2|}{\sqrt{y_2^2 + (2 - x_2)^2}},$$

$$\text{即证 } \frac{y_1^2}{y_1^2 + (2 - x_1)^2} = \frac{y_2^2}{y_2^2 + (2 - x_2)^2}$$

$$\text{即证 } y_1^2(2 - x_2)^2 = y_2^2(2 - x_1)^2$$

$$\text{由于 } |x_1| < \sqrt{2}, |x_2| < \sqrt{2}, \quad y_1 > 0, y_2 < 0,$$

$$\text{即证 } y_1(2 - x_2) = -y_2(2 - x_1)$$

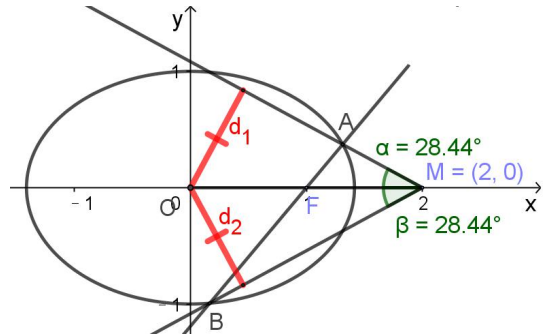
$$\text{即证 } 2(y_1 + y_2) = x_1 y_2 + x_2 y_1,$$

$$\text{将直线 } y = k(x - 1) \text{ 代入椭圆 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1,$$

$$\text{得 } (2k^2 + 1)x^2 - 4k^2 x + 2k^2 - 2 = 0,$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{2k^2 + 1}, x_1 \cdot x_2 = \frac{2k^2 - 2}{2k^2 + 1}$$

$$\text{则 } 2(y_1 + y_2) = 2k(x_1 + x_2 - 2) = 2k\left(\frac{4k^2}{2k^2 + 1} - 2\right) = \frac{-4k}{2k^2 + 1},$$



$$\begin{aligned}
 x_1 y_2 + x_2 y_1 &= x_1 \cdot k(x_2 - 1) + x_2 \cdot k(x_1 - 1) = 2kx_1 x_2 - k(x_1 + x_2) \\
 &= \frac{2k \cdot (2k^2 - 2)}{2k^2 + 1} - k \cdot \frac{4k^2}{2k^2 + 1} = \frac{-4k^2}{2k^2 + 1}
 \end{aligned}$$

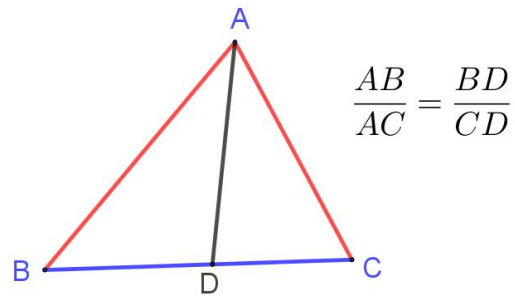
所以 $2(y_1 + y_2) = x_1 y_2 + x_2 y_1$,

进而可得 $d_1 = d_2$,

依据三角形内角平分线性质的逆定理, 可知 OM 平分 $\angle AMB$,

所以 $\angle OMA = \angle OMB$.

考虑三角形内角平分线性质的逆定理 2 如果三角形一边上的某个点与这条边所成的两条线段与这条边的对角的两边对应成比例, 那么该点与对角顶点的连线是三角形的一条角平分线.



(2) 当 l 与 x 轴不重合也不垂直时,

不妨设直线 $l: y = k(x-1) (k \neq 0)$, $A(x_1, y_1) (y_1 > 0), B(x_2, y_2) (y_2 < 0)$,

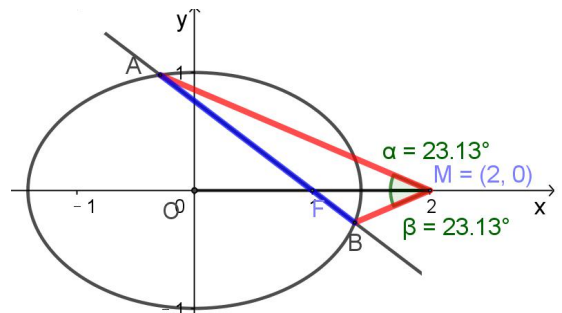
且 $|x_1| < \sqrt{2}, |x_2| < \sqrt{2}$,

如图,

要证 MF 是 $\angle AMB$ 的内角平分线, 只需证明: $\frac{|MA|}{|MB|} = \frac{|AF|}{|BF|}$.

下面分别计算 $\frac{|MA|}{|MB|}$ 和 $\frac{|AF|}{|BF|}$.

$$\frac{|MA|}{|MB|} = \frac{\sqrt{y_1^2 + (2-x_1)^2}}{\sqrt{y_2^2 + (2-x_2)^2}}, \quad \frac{|AF|}{|BF|} = \frac{|y_1|}{|y_2|},$$



要证: $\frac{|MA|}{|MB|} = \frac{|AF|}{|BF|}$, 即证: $\frac{\sqrt{y_1^2 + (2-x_1)^2}}{\sqrt{y_2^2 + (2-x_2)^2}} = \frac{|y_1|}{|y_2|}$,

即证: $\frac{y_1^2 + (2-x_1)^2}{y_2^2 + (2-x_2)^2} = \frac{y_1^2}{y_2^2}$

以下分析与解答过程同解法二.

【任务五】角平分线是对称图形, 由此你有哪些联想, 对解决本题有哪些启发?

由两角相等, 我们联想到角平分线, 而角平分线是一个对称图形, 对称是平面几何重要的几何关系, 对称图形中包含很多相等的几何量和某些特殊的几何图形, 如角、线段、角平分线、线段的垂直平分线等, 为解决本题打开了更广阔的思路.

实际上, 角平分线是角的对称轴, 角一边上的任意一点关于对称轴的对称点一定在角的另一边上, 据此, 我们得到第四种解法.

(2) 当 l 与 x 轴不重合也不垂直时,

不妨设直线 $l: y = k(x-1) (k \neq 0)$,

$A(x_1, y_1) (y_1 > 0), B(x_2, y_2) (y_2 < 0)$,

且 $|x_1| < \sqrt{2}, |x_2| < \sqrt{2}$,

设点 A 关于 x 轴的对称点为 $A_1(x_1, -y_1)$,

要证 MF 是 $\angle AMB$ 的内角平分线,

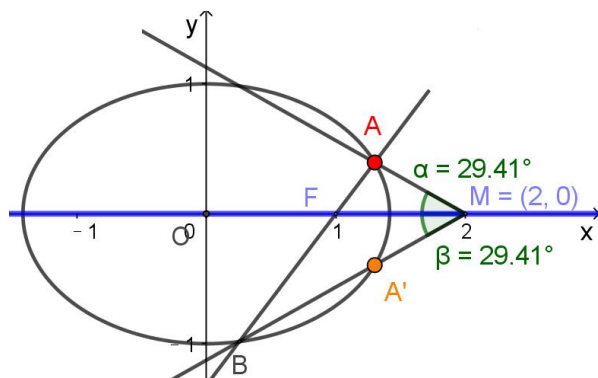
只需证明: 点 A 关于 x 轴的对称点 $A_1(x_1, -y_1)$ 在直线 MB 上.

即证 $A_1(x_1, -y_1)$ 的坐标符合直线 MB 的方程为 $y = \frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$,

即证: $-y_1 = \frac{y_2}{x_2-2}(x_1-2)$

即证 $-y_1(x_2-2) = y_2(x_1-2)$

即证 $2(y_1 + y_2) = x_1 y_2 + x_2 y_1$,



下同方法二.

【任务六】向量具有代数与几何双重身份，融数形于一体，是沟通代数与几何的桥梁，它可以将几何问题坐标化、数量化，因此它是解决解析几何问题的重要工具. 本题能用向量解决吗？向量中哪些概念与角有关？

我们可以将两角相等转化为两角的余弦值相等，进而运用向量的数量积解决问题.

(2) 当 l 与 x 轴不重合也不垂直时，

不妨设直线 $l: y = k(x-1) (k \neq 0)$, $A(x_1, y_1) (y_1 > 0), B(x_2, y_2) (y_2 < 0)$,

且 $|x_1| < \sqrt{2}, |x_2| < \sqrt{2}$,

$$\overrightarrow{OM} = (2, 0), \overrightarrow{AM} = (2 - x_1, -y_1), \overrightarrow{BM} = (2 - x_2, -y_2),$$

$$\text{所以 } \cos \angle OMA = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{AM}|} = \frac{2 \cdot (2 - x_1)}{2 \cdot \sqrt{(2 - x_1)^2 + y_1^2}},$$

$$\cos \angle OMB = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BM}}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{BM}|} = \frac{2 \cdot (2 - x_2)}{2 \cdot \sqrt{(2 - x_2)^2 + y_2^2}},$$

要证: $\cos \angle OMA = \cos \angle OMB$,

$$\text{只需证: } \frac{2 \cdot (2 - x_1)}{2 \cdot \sqrt{(2 - x_1)^2 + y_1^2}} = \frac{2 \cdot (2 - x_2)}{2 \cdot \sqrt{(2 - x_2)^2 + y_2^2}},$$

$$\text{即证: } \frac{(2 - x_1)^2}{(2 - x_1)^2 + y_1^2} = \frac{(2 - x_2)^2}{(2 - x_2)^2 + y_2^2},$$

$$\text{即证: } (2 - x_1)^2 \cdot y_2^2 = (2 - x_2)^2 \cdot y_1^2.$$

下同解法二.