

## 从一道综合题看解析几何运算合理性

### 【学习目标】

通过一道抛物线综合题解法的分析，体会解析几何算法算理的选择，训练在解决问题中推理论证能力和运算求解能力.

### 【学习要点】

抛物线的方程，直线与抛物线的位置关系

### 【学习内容】

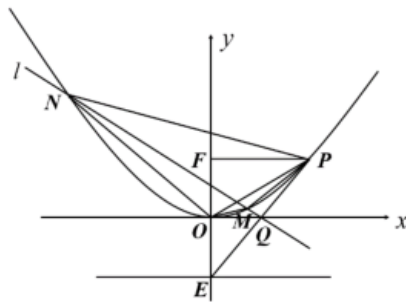
【例】已知抛物线  $C: x^2 = 2py (p > 0)$ ，焦点为  $F$ ，准线与  $y$  轴交于点  $E$ .

若点  $P$  在  $C$  上，横坐标为 2，且满足： $|PE| = \sqrt{2}|PF|$ .

(1) 求抛物线  $C$  的方程；

(2) 若直线  $PE$  交  $x$  轴于点  $Q$ ，过点  $Q$  作直线  $l$ ，与抛物线  $C$  有两个交点  $M, N$

(其中，点  $M$  在第一象限). 若  $\overrightarrow{QM} = \lambda \overrightarrow{MN}$ ，当  $\lambda \in (1, 2)$  时，求  $\frac{S_{\triangle OMP}}{S_{\triangle ONP}}$  的取值范围.



### 【思路分析】

(1) 由  $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ ,  $E\left(0, -\frac{p}{2}\right)$ ,  $P\left(2, \frac{2}{p}\right)$ ，结合  $|PE| = \sqrt{2}|PF|$  求得  $p = 2$  方程可求

(2) 设直线  $l$  的方程为  $x = my + 1$ ，与抛物线联立，向量  $\overrightarrow{QM} = \lambda \overrightarrow{MN}$  坐标化得

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\lambda}{\lambda + 1}, \text{ 将面积比转化为 } \frac{S_{\triangle OMP}}{S_{\triangle ONP}} = \frac{\left| \left( \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} \right) y_1 - 2 \right|}{\left| \left( \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} \right) y_2 - 2 \right|} = \left| \frac{y_1}{y_2} \right| = \frac{y_1}{y_2}, \text{ 求解范围即可}$$

【解析】

(1) 由已知可得  $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ ,  $E\left(0, -\frac{p}{2}\right)$ ,  $P\left(2, \frac{2}{p}\right)$ ,

$$\because |PE| = \sqrt{2}|PF|,$$

$$\therefore \sqrt{4 + \left(\frac{2}{p} + \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4 + \left(\frac{2}{p} - \frac{p}{2}\right)^2},$$

$$\because p > 0, \therefore p = 2,$$

$\therefore$  抛物线  $C$  的方程为  $x^2 = 4y$ .

(2) 由 (1) 得  $P(2, 1)$ ,  $E(0, -1)$ , 易求得  $Q(1, 0)$ .

由题意得, 直线  $l$  的斜率存在且不为 0,

可设直线  $l$  的方程为  $x = my + 1$ ,

$$\text{联立方程组} \begin{cases} x = my + 1 \\ x^2 = 4y \end{cases}$$

整理得  $m^2 y^2 + (2m - 4)y + 1 = 0$ ,  $\Delta = 16 - 16m > 0$ ,  $m < 1$ .

设点  $M(x_1, y_1)$ ,  $N(x_2, y_2)$ ,

$$\therefore y_1 + y_2 = \frac{4 - 2m}{m^2}, \quad y_1 \cdot y_2 = \frac{1}{m^2},$$

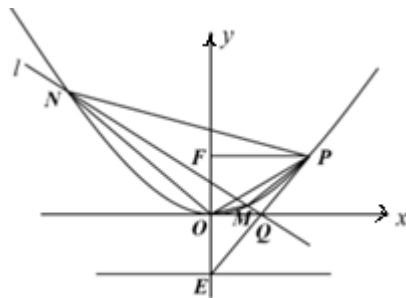
$$\therefore \frac{y_1 + y_2}{y_1 \cdot y_2} = \frac{4 - 2m}{1}, \quad \text{即} \quad \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = 4 - 2m,$$

$$\because \overrightarrow{QM} = \lambda \overrightarrow{MN},$$

$$\therefore y_1 = \lambda(y_2 - y_1), \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{\lambda}{\lambda + 1},$$

$$\because \lambda \in (1, 2), \therefore \frac{y_1}{y_2} = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right),$$

设  $\triangle OMP$  在  $OP$  边上的高为  $h_M$ ,  $\triangle ONP$  在  $OP$  边上的高为  $h_N$ ,



$$\begin{aligned}
\frac{S_{\triangle OMP}}{S_{\triangle ONP}} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot |OP| \cdot h_M}{\frac{1}{2} \cdot |OP| \cdot h_N} = \frac{h_M}{h_N} = \frac{|x_1 - 2y_1|}{|x_2 - 2y_2|} \\
&= \frac{|(m-2)y_1 + 1|}{|(m-2)y_2 + 1|} = \frac{|(2m-4)y_1 + 2|}{|(2m-4)y_2 + 2|} \\
&= \frac{|(4-2m)y_1 - 2|}{|(4-2m)y_2 - 2|} = \frac{\left| \left( \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} \right) y_1 - 2 \right|}{\left| \left( \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} \right) y_2 - 2 \right|} \\
&= \left| \frac{y_1}{y_2} \right| = \frac{y_1}{y_2} \in \left( \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right). \\
\therefore \frac{S_{\triangle OMP}}{S_{\triangle ONP}} \text{ 的取值范围是 } &\left( \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right)
\end{aligned}$$

### 【小结】

本题考查抛物线的方程，考查直线与抛物线的位置关系，考查向量坐标化与韦达定理的应用. 它给我们提供的启示，就是在面对解析几何问题时，要善于对几何图形的结构的把握，重视条件与结论的关联分析，从具体问题出发，寻求合理的运算途径，便捷地实现几何问题代数化.