

【拓展性作业】椭圆 M 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ，设直线 l 与椭圆 M 交于 A, B 两点，且以 AB 为直径的圆过椭圆的右顶点 Q ，求 $\triangle ABQ$ 面积的最大值。

【作业答案】

方法 1：设直线 AQ 的方程为： $y = k(x-2)$ ，直线 BQ 的方程为： $y = -\frac{1}{k}(x-2)$ 。

设 $Q(2,0), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，

$$\begin{cases} y = k(x-2), \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1. \end{cases} \quad \text{消去 } y \text{ 整理得： } (1+4k^2)x^2 - 16k^2x + 16k^2 - 4 = 0$$

又知 $2, x_1$ 是上述方程的两个实根，所以 $2x_1 = \frac{16k^2 - 4}{1+4k^2}$ ， $\therefore x_1 = \frac{8k^2 - 2}{1+4k^2}$ 。

$$|AQ| = \sqrt{1+k^2} |2 - x_1| = \sqrt{1+k^2} \left| 2 - \frac{8k^2 - 2}{1+4k^2} \right| = \frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2},$$

同理，以 $-\frac{1}{k}$ 替换上述的 k ，可得 $x_2 = \frac{4k}{k^2 + 4}$ 。

$$|BQ| = \sqrt{1+k^2} |2 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \left| 2 - \frac{8-2k^2}{k^2+4} \right| = \frac{4\sqrt{1+(-\frac{1}{k})^2}}{1+4(-\frac{1}{k})^2} = \frac{4|k|\sqrt{1+k^2}}{k^2+4}$$

$$\begin{aligned} \text{所以, } S_{\triangle ABQ} &= \frac{1}{2} |AQ| |BQ| = \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2} \times \frac{4|k|\sqrt{1+k^2}}{k^2+4} \\ &= \frac{8|k|(1+k^2)}{(1+4k^2)(k^2+4)} = \frac{8|k|(1+k^2)}{4k^4+17k^2+4} = \frac{8(|k|+\frac{1}{|k|})}{4k^2+17+\frac{4}{k^2}} = \frac{8t}{4t^2+9} = \frac{8}{4t+\frac{9}{t}} \leq \frac{8}{8+\frac{9}{2}} = \frac{16}{25} \end{aligned}$$

当 $t=2, k=\pm 1$ 时， $S_{\triangle ABQ}$ 的最大值为 $\frac{16}{25}$ 。(均值不等式实效)

方法 2：不妨设直线 AB 的方程 $x = ny + \frac{6}{5}$ 。设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，

$$\text{由 } \begin{cases} x = ny + \frac{6}{5}, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases} \quad \text{消去 } x \text{ 得 } (n^2+4)y^2 + \frac{12}{5}ny - \frac{64}{25} = 0,$$

$$\text{则有 } y_1 + y_2 = -\frac{12n}{5(n^2+4)}, \quad y_1 y_2 = \frac{-64}{25(n^2+4)}. \quad \textcircled{1}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |DQ| |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2}.$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \sqrt{\left(-\frac{12n}{5(n^2+4)}\right)^2 + \frac{4 \times 64}{25(n^2+4)}} = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{144n^2}{25(n^2+4)^2} + \frac{4 \times 64}{25(n^2+4)}}$$

$$= \frac{8}{25} \sqrt{\frac{9n^2}{(n^2+4)^2} + \frac{16}{n^2+4}} = \frac{8}{25} \sqrt{\frac{9n^2 + 16n^2 + 64}{(n^2+4)^2}} = \frac{8}{25} \sqrt{\frac{25n^2 + 64}{(n^2+4)^2}}$$

$$\text{令 } t = \frac{1}{n^2+4} \in (0, \frac{1}{4}]$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{8}{25} \sqrt{\left(\frac{25}{t} - 36\right)t^2} = \frac{8}{25} \sqrt{25t - 36t^2} \leq \frac{8}{25} \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{9}{4}} = \frac{16}{25}$$

当 $t = \frac{1}{4}, n = 0$ 时, 面积有最大值 $\frac{16}{25}$.

方法 3: 当直线 l 斜率存在时, 有

$$\begin{cases} y = k(x - \frac{6}{5}), \\ x^2 + 4y^2 = 4. \end{cases}, \quad x^2 + 4k^2(x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{36}{25}) = 4.$$

$$\text{消去 } y \text{ 整理得: } (1+4k^2)x^2 - \frac{48k^2}{5}x + \frac{144k^2}{25} - 4 = 0.$$

因为点 $(\frac{6}{5}, 0)$ 在椭圆 C 的内部, 显然 $\Delta > 0$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{48k^2}{5(1+4k^2)}, \\ x_1 x_2 = \frac{144k^2 - 100}{25(1+4k^2)}. \end{cases}$$

$$\Delta = \left(-\frac{48k^2}{5}\right)^2 - 4(1+4k^2)\left(\frac{144k^2}{25} - 4\right) = -4\left(\frac{144k^2}{25} - 4 - 16k^2\right) = 4\left(4 + 16k^2 - \frac{144k^2}{25}\right)$$

$$= 16\left(1 + 4k^2 - \frac{36k^2}{25}\right) = 16\left(1 + \frac{64}{25}k^2\right)$$

$$\text{所以, } |AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \times \frac{\sqrt{\Delta}}{1+4k^2} = \sqrt{1+k^2} \times \frac{\sqrt{16(1+\frac{64}{25}k^2)}}{1+4k^2}$$

点 Q 到直线 l 的距离为 $d = \frac{|\frac{4}{5}k|}{\sqrt{1+k^2}}$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AB| d = \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{1+\frac{64}{25}k^2}}{1+4k^2} \times \frac{4}{5} |k| = \frac{8}{5} \times \frac{\sqrt{(1+\frac{64}{25}k^2)k^2}}{1+4k^2} = \frac{8}{25} \times \frac{\sqrt{(25+64k^2)k^2}}{1+4k^2}$$

$$\text{令 } t = \frac{1}{1+4k^2} \in (0,1), \quad 1+4k^2 = \frac{1}{t}, \quad 4k^2 = \frac{1}{t} - 1, \quad k^2 = \frac{1}{4}(\frac{1}{t} - 1),$$

$$\text{所以, } S_{\triangle ABC} = \frac{8}{25} \times \frac{\sqrt{(25+64k^2)k^2}}{1+4k^2} = \frac{8}{25} \times \sqrt{[25+16(\frac{1}{t}-1)] \times \frac{1}{4}(\frac{1}{t}-1)t^2}$$

$$= \frac{8}{25} \times \sqrt{[25+16(\frac{1}{t}-1)] \times \frac{1}{4}(\frac{1}{t}-1)t^2} = \frac{4}{25} \times \sqrt{(\frac{16}{t}+9) \times (\frac{1}{t}-1)t^2}$$

$$= \frac{4}{25} \times \sqrt{(16+9t) \times (1-t)} = \frac{4}{25} \times \sqrt{16-7t-9t^2} < \frac{16}{25}$$

当直线 l 的斜率不存在时, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AB| d = \frac{16}{25}.$

从上可知, $S_{\triangle ABQ}$ 的最大值为 $\frac{16}{25}.$