函数的周期性与对称性 学习指南

【学习目标】

1. 了解周期性的概念和几何意义
2. 掌握判断函数周期性的方法和步骤，会运用周期性的定义式解决简单的函数周期性问题

【学法指导】

一. 知识梳理

(1) 周期函数: 对于函数 $y=f(x)$, 如果存在一个非零常数 T , 使得当 x 取定义域内的任何值时, 都有 _____, 那么就称函数 $y=f(x)$ 为周期函数, 称 _____ 为这个函数的周期.

(2) 最小正周期: 如果在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中 _____ 的正数, 那么这个最小正数就叫做 $f(x)$ 的最小正周期.

二. 典型例题

题型一 函数的周期性

例 1 (1) 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+6)=f(x)$, 当 $-3 \leq x < 1$ 时, $f(x)=-(x+2)^2$; 当 $1 \leq x < 3$ 时, $f(x)=x$. 则 $f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(2015)=$ _____.

(2) 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 并且 $f(x+2)=-\frac{1}{f(x)}$, 当 $2 \leq x \leq 3$ 时, $f(x)=x$, 则 $f(105.5)=$ _____.

思维升华

① 函数的周期性反映了函数在整个定义域上的性质. 对函数周期性的考查, 主要涉及函数周期性的判断, 利用函数周期性求值.

② 函数周期性的三个常用结论:

① 若 $f(x+a)=-f(x)$, 则 $T=2a$,

② 若 $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}$, 则 $T=2a$,

③ 若 $f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}$, 则 $T=2a(a>0)$.

题型二 函数性质的综合应用

例 2 (1) 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的以 3 为周期的偶函数, 若 $f(1)<1$, $f(5)=\frac{2a-3}{a+1}$, 则实数 a 的取值范围为()

A. $(-1,4)$

B. $(-2,0)$

C. $(-1,0)$

D. $(-1,2)$

(2) 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x-4) = -f(x)$ ，且在区间 $[0,2]$ 上是增函数，则()

A. $f(-25) < f(11) < f(80)$

B. $f(80) < f(11) < f(-25)$

C. $f(11) < f(80) < f(-25)$

D. $f(-25) < f(80) < f(11)$

思维升华

① 关于奇偶性、单调性、周期性的综合性问题，关键是利用奇偶性和周期性将未知区间上的问题转化为已知区间上的问题.

② 掌握以下两个结论，会给解题带来方便：(i) $f(x)$ 为偶函数 $\Leftrightarrow f(x) = f(|x|)$. (ii) 若奇函数在 $x=0$ 处有意义，则 $f(0)=0$.

三. 课堂小结

1. 知识清单：

2. 方法归纳：

3. 常见误区：